

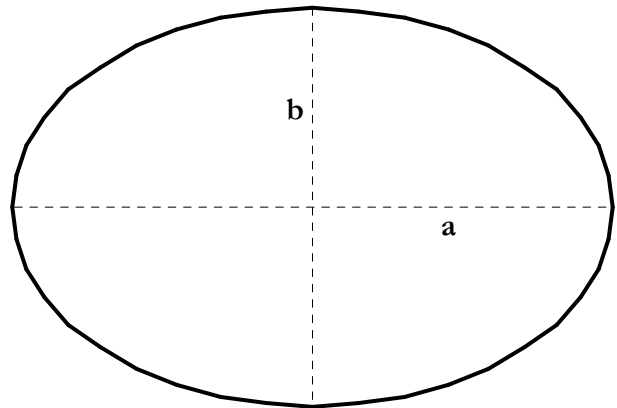
## ELLISSI E PROBLEMI ISOPERIMETRICI

### Testo del problema

Sia data un'ellisse di semiasse maggiore  $a$  e semiasse minore  $b$ .

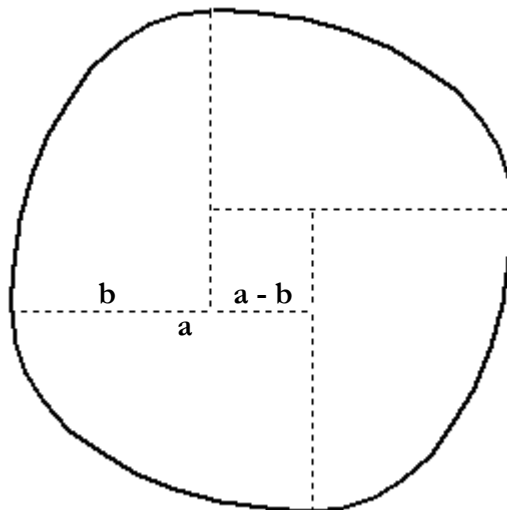
Riuscite a determinare una curva chiusa piana che abbia la stessa lunghezza dell'ellisse e che racchiuda una superficie la cui area superi quella dell'ellisse di una quantità pari a  $(a - b)^2$ ?

Se sì, come?

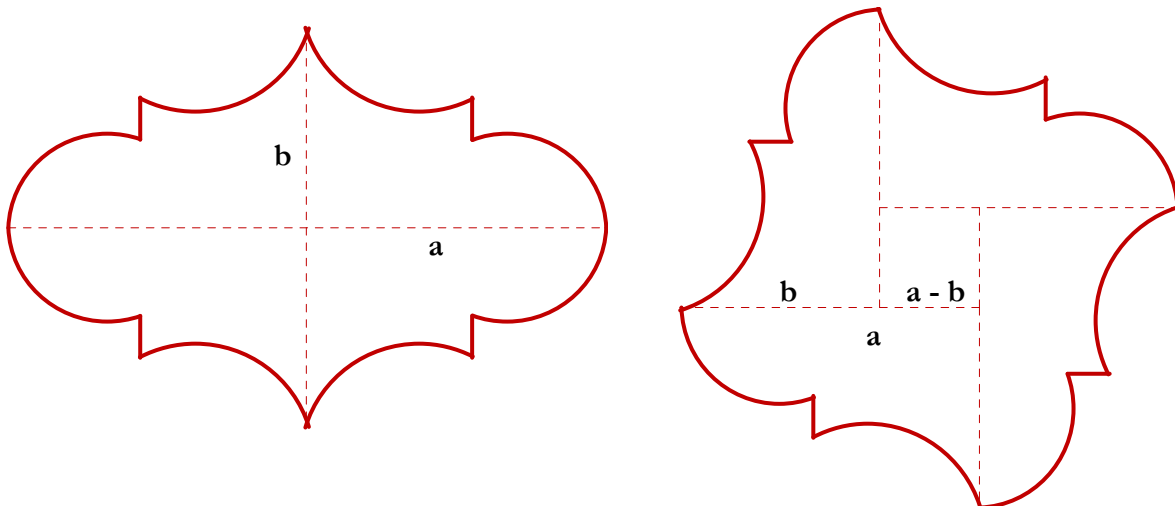


### Soluzione

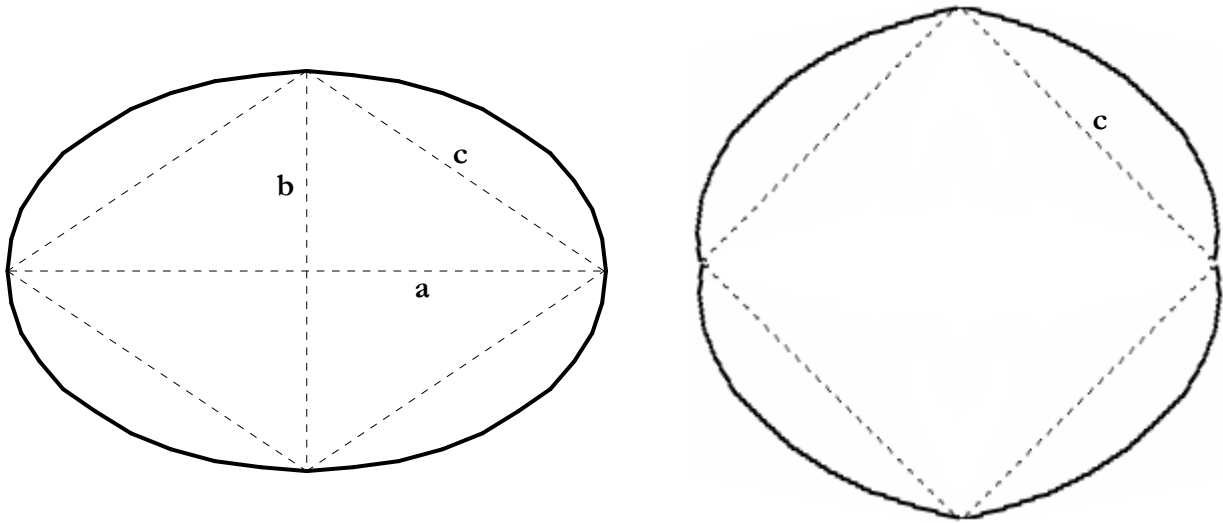
Tagliamo l'ellisse in quattro parti seguendo esattamente i suoi assi di simmetria, ribaltiamo due di questi pezzi e poi ricomponiamoli come in figura, in modo tale che i corrispondenti archi formino una curva chiusa. Così facendo, viene "circondato" un quadrato, il cui lato è lungo proprio  $a - b$ .



Osserviamo che questa costruzione è valida non solo per l'ellisse, ma anche per una qualsiasi curva chiusa che abbia almeno due assi di simmetria ortogonali tra loro, come ad esempio per la curva qui sotto rappresentata.



Come spesso succede in matematica, differenti possono essere i modi con cui risolvere un problema e qui ne illustriamo un altro: colleghiamo ordinatamente i vertici dell'ellisse con quattro segmenti, determinando così un rombo, tagliamo lungo questi segmenti, eliminiamo il rombo e posizioniamo i quattro pezzi rimasti in modo che individuino un quadrato, il cui lato  $c$  coincida con quello del rombo.



La curva così ottenuta racchiude una superficie formata dai quattro pezzetti di ellisse e dal quadrato di lato  $c$ . Il quadrato ha area  $c^2$ , il rombo  $2ab$ , ed essendo  $c^2 = a^2 + b^2$ , l'area dei due quadrilateri differisce per  $c^2 - 2ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ .

Osserviamo che, contrariamente alla costruzione precedente, in questo caso i 4 “pezzetti” di ellisse differiscono dai pezzi iniziali per una isometria DIRETTA; e quindi, se realizziamo fisicamente la costruzione con carta e forbici, non abbiamo bisogno di ribaltamenti.

Che cosa succede se questa costruzione (oppure quella precedentemente esposta) viene effettuata su una circonferenza?

## Matematica coinvolta

### *Problemi isoperimetrici.*

Per problemi isoperimetrici si intendono quei problemi che coinvolgono un insieme di figure piane dello stesso perimetro, e che eventualmente hanno un'altra caratteristica in comune, tra le quali si cerca quella (o quelle) che soddisfi una certa proprietà.

Il “problema isoperimetrico” per eccellenza consiste nel trovare fra tutte le figure piane di ugual perimetro quella di area massima.

Il suo corrispondente nello spazio chiede di determinare fra tutti i solidi di uguale superficie quello di volume massimo.

La soluzione del primo problema è il cerchio, quella del secondo la sfera.

La cosa può sembrare ovvia: in fondo quando gonfiamo un sacchetto, man mano che l'aria entra, la sua superficie si fa sempre più “tonda”... Ma la dimostrazione non è affatto semplice, tutt'altro! e si è dovuto aspettare il XIX secolo per averne una.

Il problema duale del problema isoperimetrico chiede di determinare fra tutte le figure piane di uguale area quella di perimetro minimo e fra tutti i solidi di uguale volume quello di superficie minima. Anche in questo caso le soluzioni sono, rispettivamente, il cerchio e la sfera. In effetti si può dimostrare che il problema isoperimetrico e il suo duale sono sostanzialmente equivalenti.

Nel caso della sfera, un bellissimo modello concreto del problema è fornito da una semplice bolla di sapone.

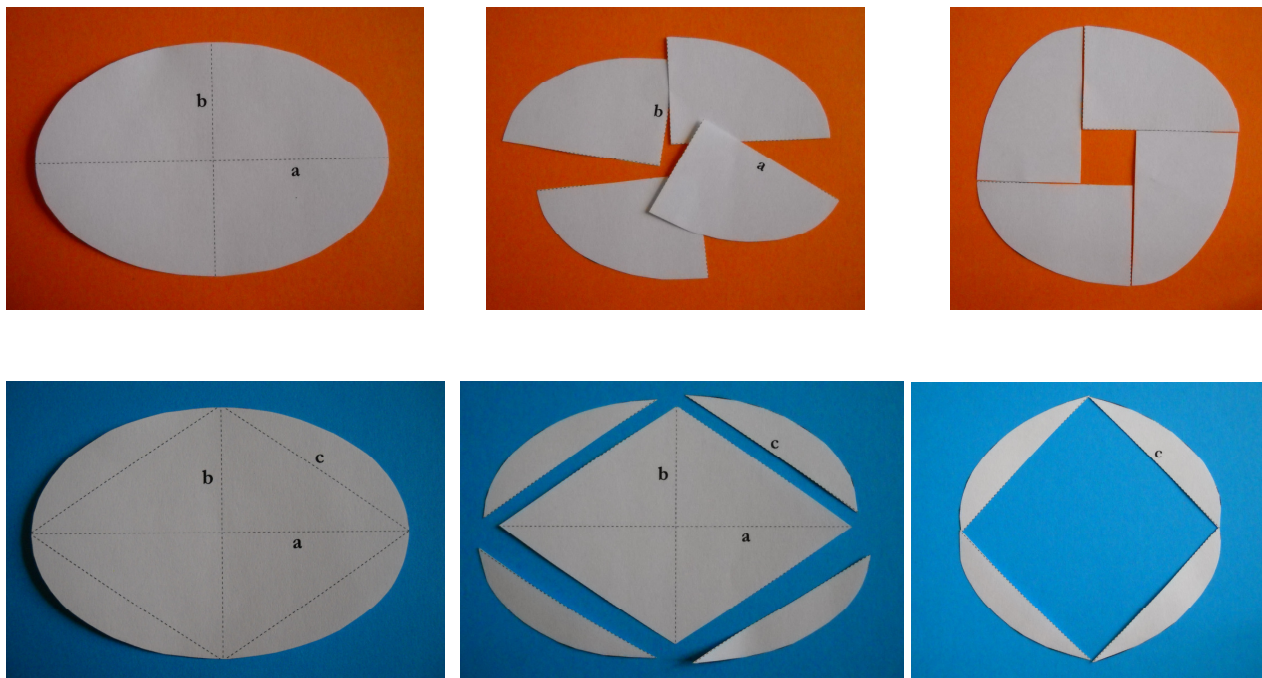


Dipinto eseguito in acrilico dalla pittrice  
Rossella Laura Consonni

Infatti in condizione d'equilibrio una bolla di sapone racchiude un determinato volume d'aria in un involucro della più piccola estensione possibile, e il fatto che così facendo la forma della bolla sia sferica fa proprio pensare che la sfera sia la soluzione del problema.

## Commento

Il problema da cui siamo partiti mi piace perché la sua soluzione può essere immaginata anche facendo riferimento ad un modello concreto: sono sufficienti un po' di carta e delle forbici, nella fantasia o concretamente, per giungere in maniera piuttosto semplice alla soluzione.



Inoltre, mi piace perché ha dei risvolti storici interessanti.

Avete risposto alla domanda finale al termine della soluzione? Sicuramente vi sarete accorti che le due costruzioni cadono in difetto nel caso della circonferenza e questo corrisponde proprio al fatto che il cerchio rappresenta la soluzione del problema isoperimetrico (ovvero la figura che racchiude la massima area a parità di perimetro).

Jacob Steiner (1796-1863), grande matematico che amava principalmente i metodi della geometria sintetica, pubblicò 5 diverse dimostrazioni della proprietà isoperimetrica del cerchio, una delle quali si basava proprio sulla seconda costruzione che abbiamo qui descritto (e sul fatto che questa fallisce per la circonferenza). Se cercate sui libri o sui siti internet che si occupano di tale questione, potete trovare scritto che tali dimostrazioni furono “incomplete”, o anche “sbagliate”, e su questo fatto ci sono state in passato vivaci polemiche tra geometri e analisti. Il punto per cui le dimostrazioni di Steiner sono incomplete è la questione dell'esistenza (di una curva che realizzi la proprietà isoperimetrica); le dimostrazioni sintetiche di Steiner provano che, dando per buona questa esistenza, tale curva è necessariamente un cerchio.

E, senza entrare nella polemica se questo sia stato un errore voluto o meno, possiamo in ogni caso dire che si è trattato di un errore prezioso perché permette di mettere in risalto la bellezza dell'argomentazione sintetica (vedi dossier sull'errore, sul n. 19 di *XIlaTangente*). Talvolta infatti per voler dare una dimostrazione “troppo giusta”, si rischia, con un eccesso di dettagli, di distogliere l'attenzione da ciò che è essenziale, nascondendo l'idea fondamentale che è alla base della dimostrazione. E questa è una questione cui dobbiamo prestare particolare attenzione in quanto insegnanti!

In tal senso può essere interessante presentare questo problema e i suoi addentellati a studenti che si stanno occupando dei problemi di massimo e di minimo.

In realtà, a mio parere, il problema si potrebbe proporre anche in classi del biennio della scuola superiore; se ci preoccupa il fatto di introdurre i termini di “ellisse” e di “semiassi”, si può osservare che

la prima costruzione usa soltanto le caratteristiche di simmetria dell'ellisse, sicché si può anche in prima battuta fare riferimento soltanto a una figura con lo stesso tipo di simmetria.  
Tra l'altro, se qualche ragazzo giungesse alla seconda risoluzione da noi esposta, ci sarebbe un bell'aggancio anche con l'algebra e i suoi famigerati prodotti notevoli!

## Divagazioni sul tema...

*Testo del problema.*

Fra tutti i triangoli di uguale perimetro e di base assegnata, qual è quello di area massima?

*Commenti.*

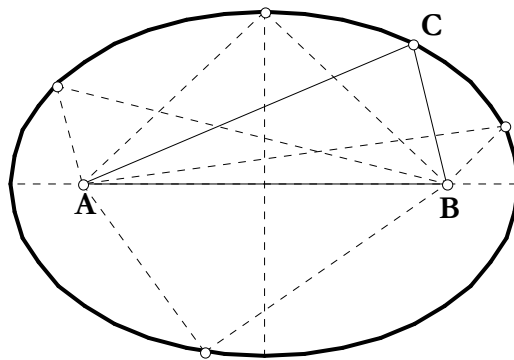
I triangoli in questione hanno tutti la stessa base (AB), quindi essi variano al variare del terzo vertice C e, dal momento che la somma delle lunghezze degli altri due lati è costante (k), C varia lungo un'ellisse che ha per fuochi i punti A e B, estremi della base, e asse maggiore di lunghezza k.

(Vedi animazione "Fissiamo il filo" alla pagina

<http://www.xlatangente.it/xlatangente/offItemById.do?id=82> )

Ancora una volta un'ellisse! Questa volta però un po' nascosta.

Sapreste proseguire fino ad arrivare alla soluzione del problema? Una figura potrebbe aiutare...



Potete trovare tanti altri problemi isoperimetrici al seguente indirizzo:

[http://matematita.science.unitn.it/laboratorio\\_max\\_min/](http://matematita.science.unitn.it/laboratorio_max_min/)

## Bibliografia

Il problema iniziale è stato tratto dal volume:

- H. Steinhaus, *Cento problemi di matematica elementare*, a cura di Franco Conti, Boringhieri, Torino, 1987

Altri libri e articoli consultati:

- C. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, 1990
- R. Courant – H. Robbins, *Che cos'è la matematica?*, Boringhieri, Torino, 1971
- Modesto Dedò, *Il rigore nell'insegnamento preuniversitario*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 16, n. 5 - 6, maggio - giugno 1993