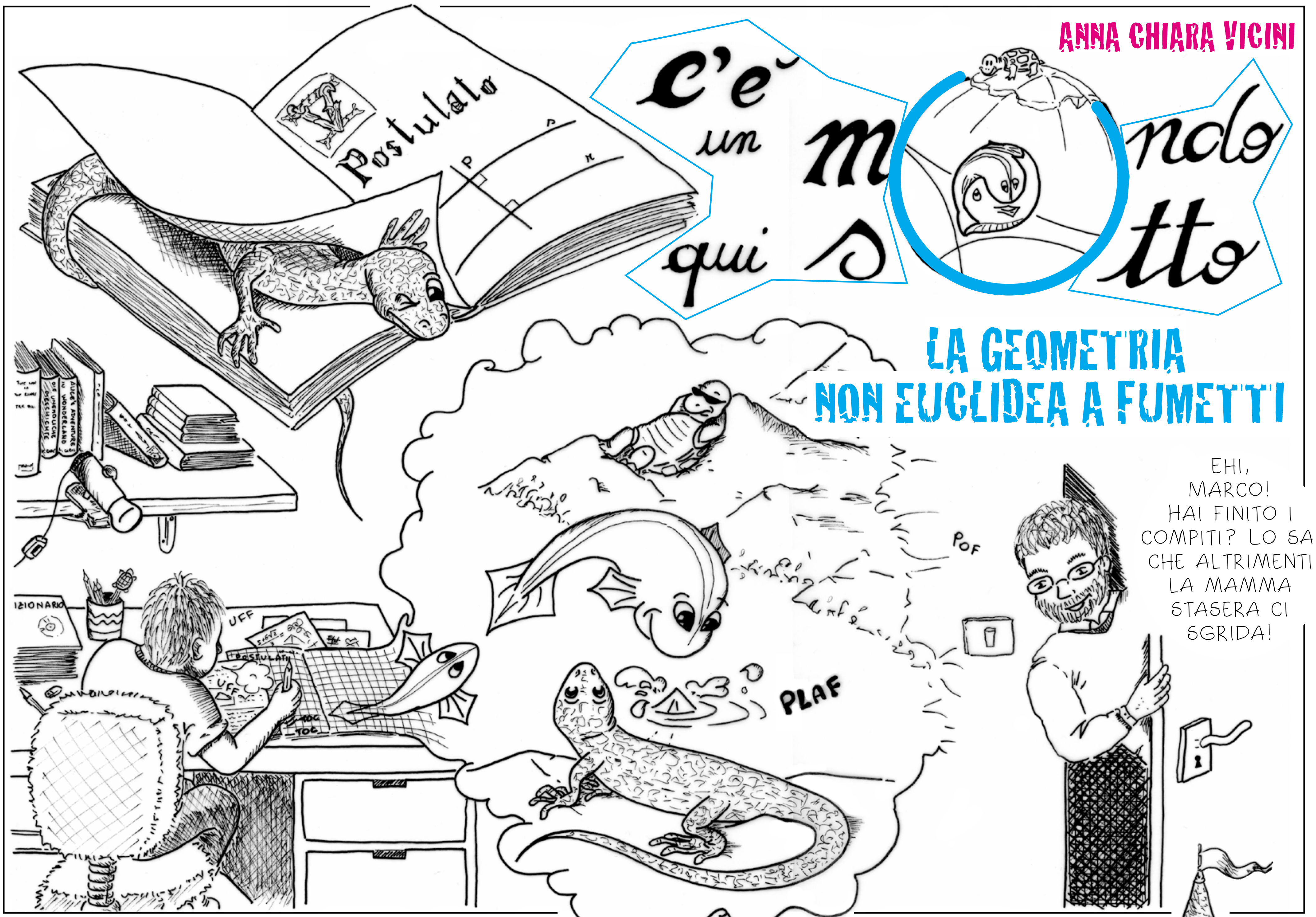
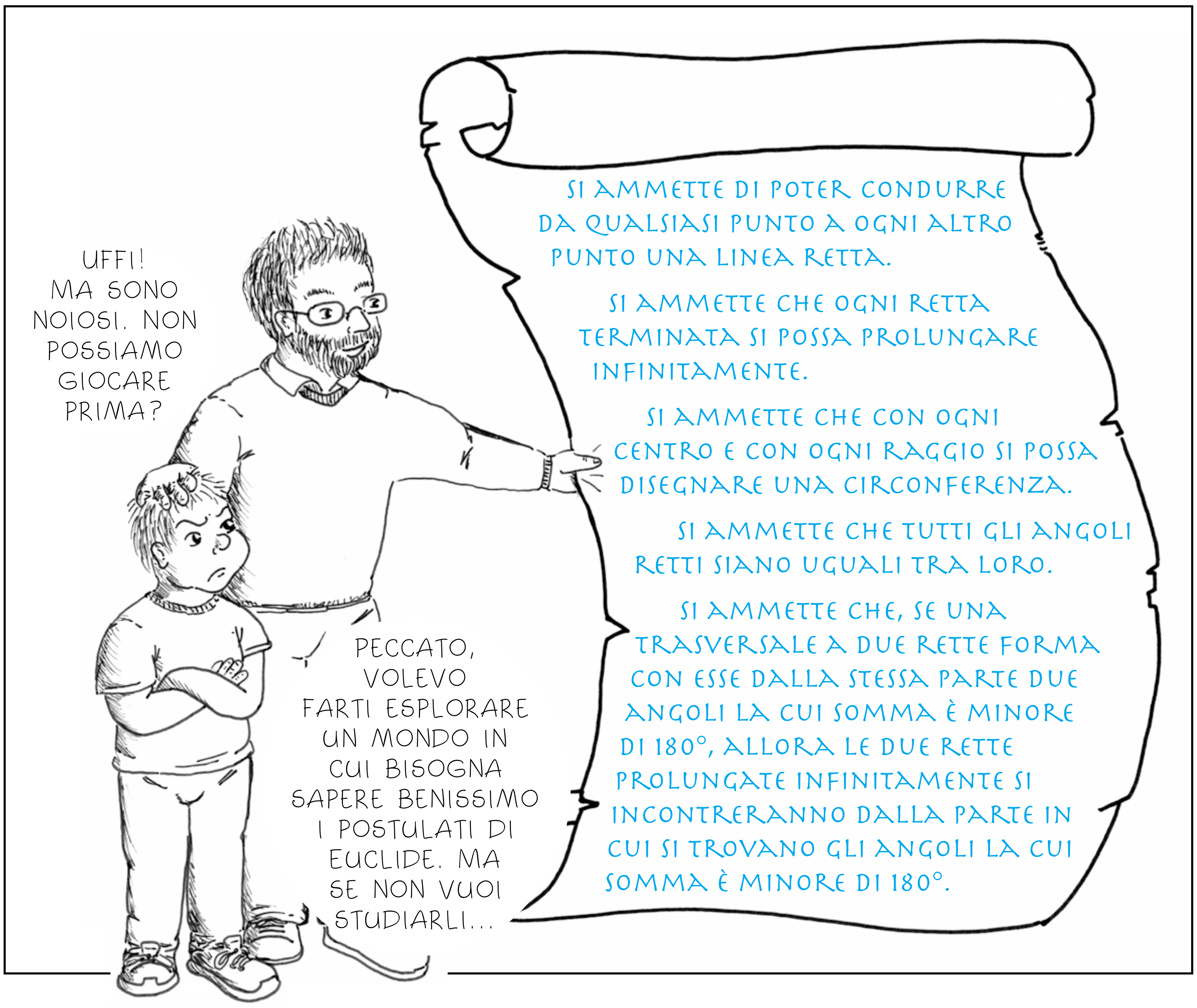
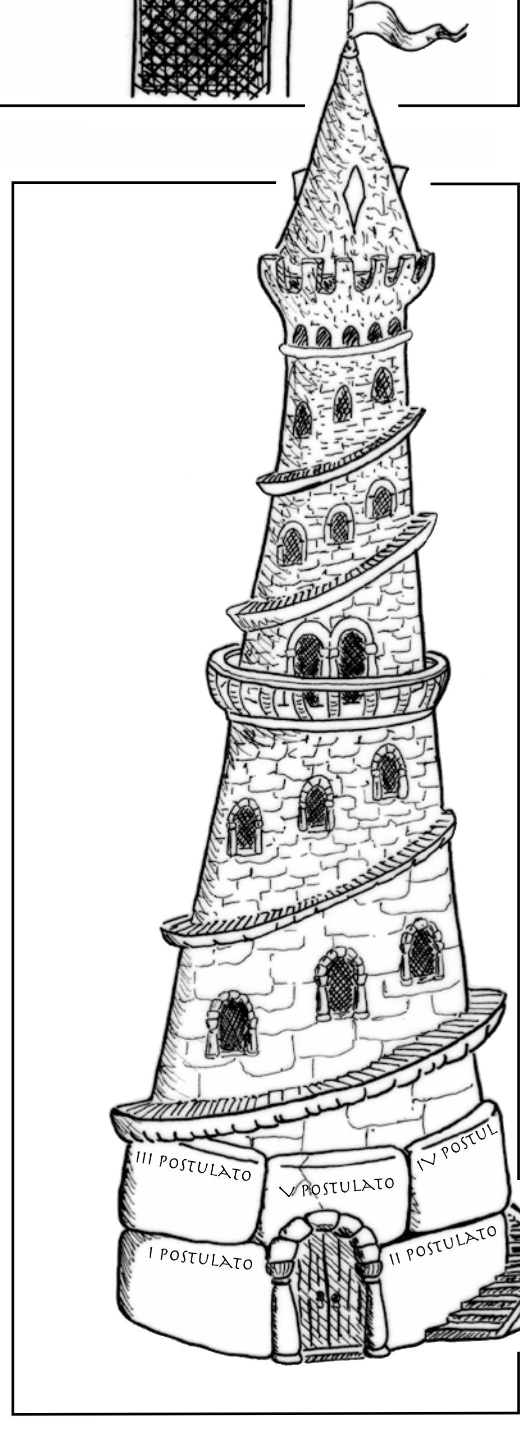
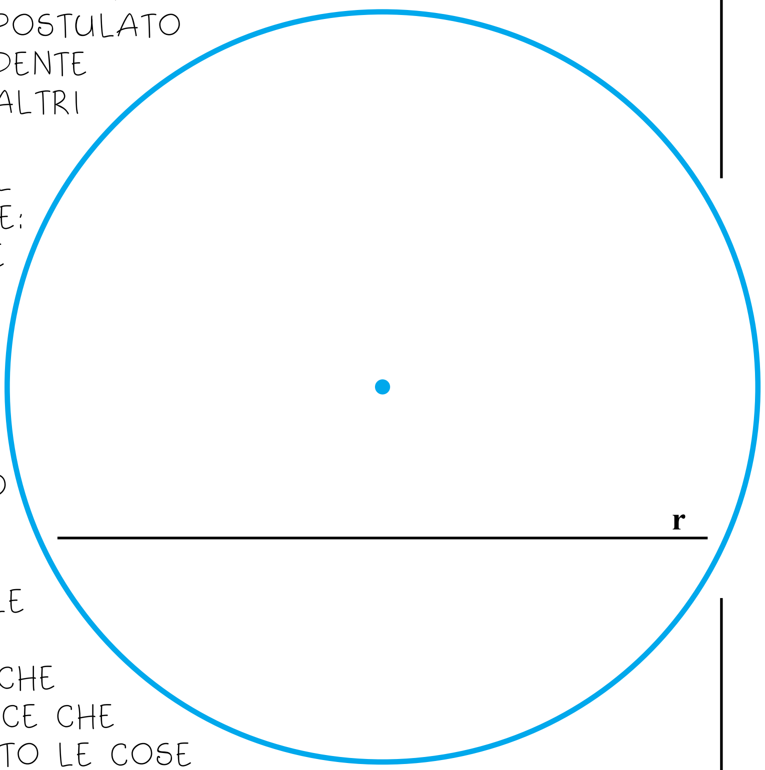






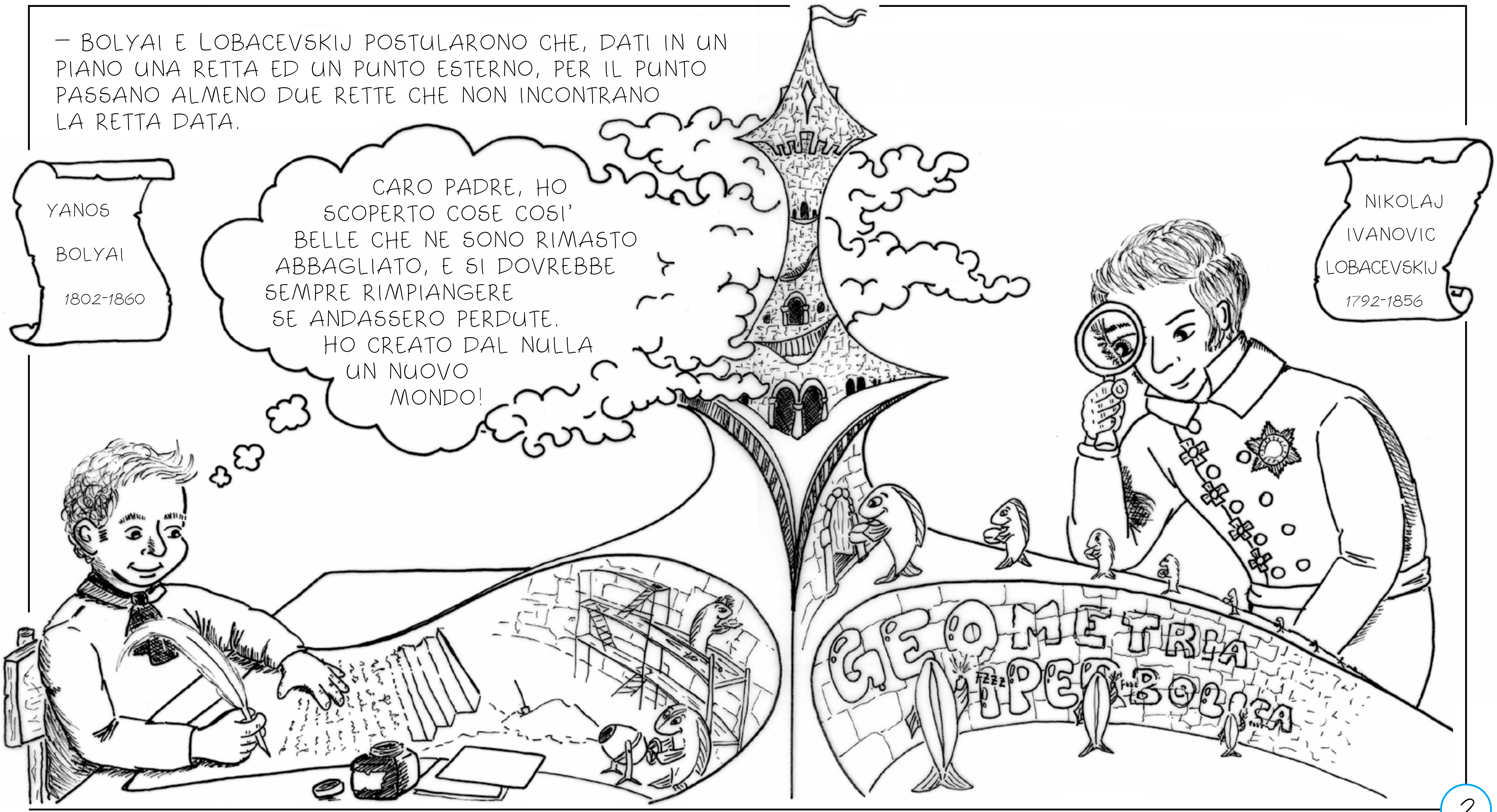
– ALLORA LI IMPARO! E' CHE LA MATEMATICA E' DIFFICILE. E LA GEOMETRIA, POI, E' NOIOSA.
– MA CHE DICI! LA GEOMETRIA E' COME UN BELLISSIMO CASTELLO, FORMATO DA STRUTTURE COMPLESSE: MURI, SCALE, TERRAZZE. QUESTI SONO I TEOREMI. MA SE GUARDI PIU' ATTENTAMENTE TI ACCORGERAI CHE PER COSTRUIRLI SERVONO ELEMENTI PIU' SEMPLICI: I POSTULATI. ALLA FINE SONO PROPRIO I POSTULATI A TENER SU L'INTERO PALAZZO! COSA SUCCEDEREBBE SE PROVASSIMO A TOGLIERNE UNO? IL QUINTO, PER ESEMPIO. SE GUARDI BENE, VEDRAI UNA CREPA.

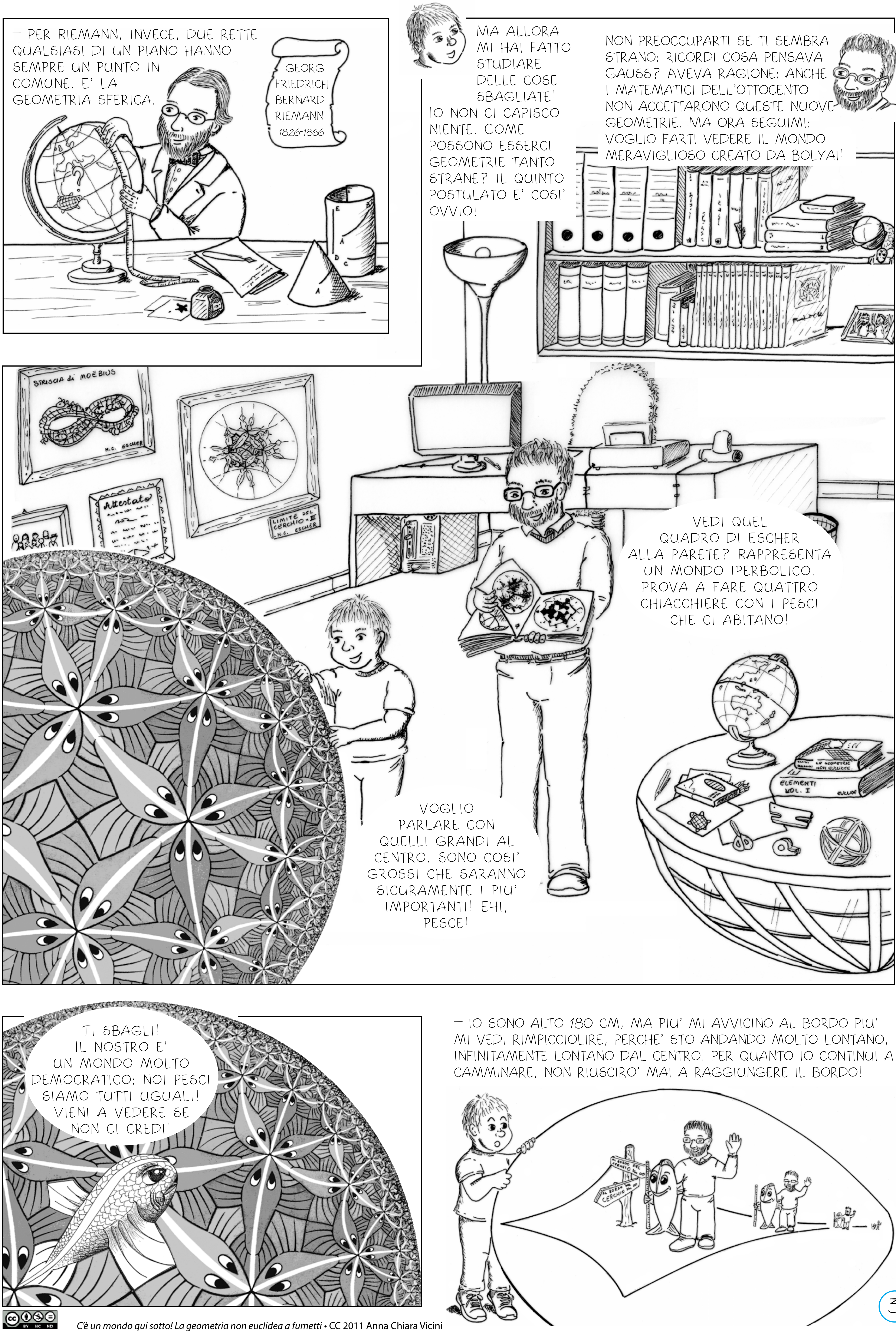
IL PROBLEMA E' CHE IL QUINTO POSTULATO NON E' EVIDENTE COME GLI ALTRI QUATTRO.
PROVA A GIRARE IL DISCO TRASPARENTE: LA RETTA **s** SMETTE D'INCONTRARE LA RETTA **r** BEN PRIMA DI ESSERE PARALLELA, MENTRE PER IL QUINTO POSTULATO CI DOVREBBE ESSERE UN'UNICA POSIZIONE IN CUI LE DUE RETTE NON SI INCONTRANO MAI. CHE COSA CI GARANTISCE CHE IN UN PIANO INFINITO LE COSE CAMBINO?



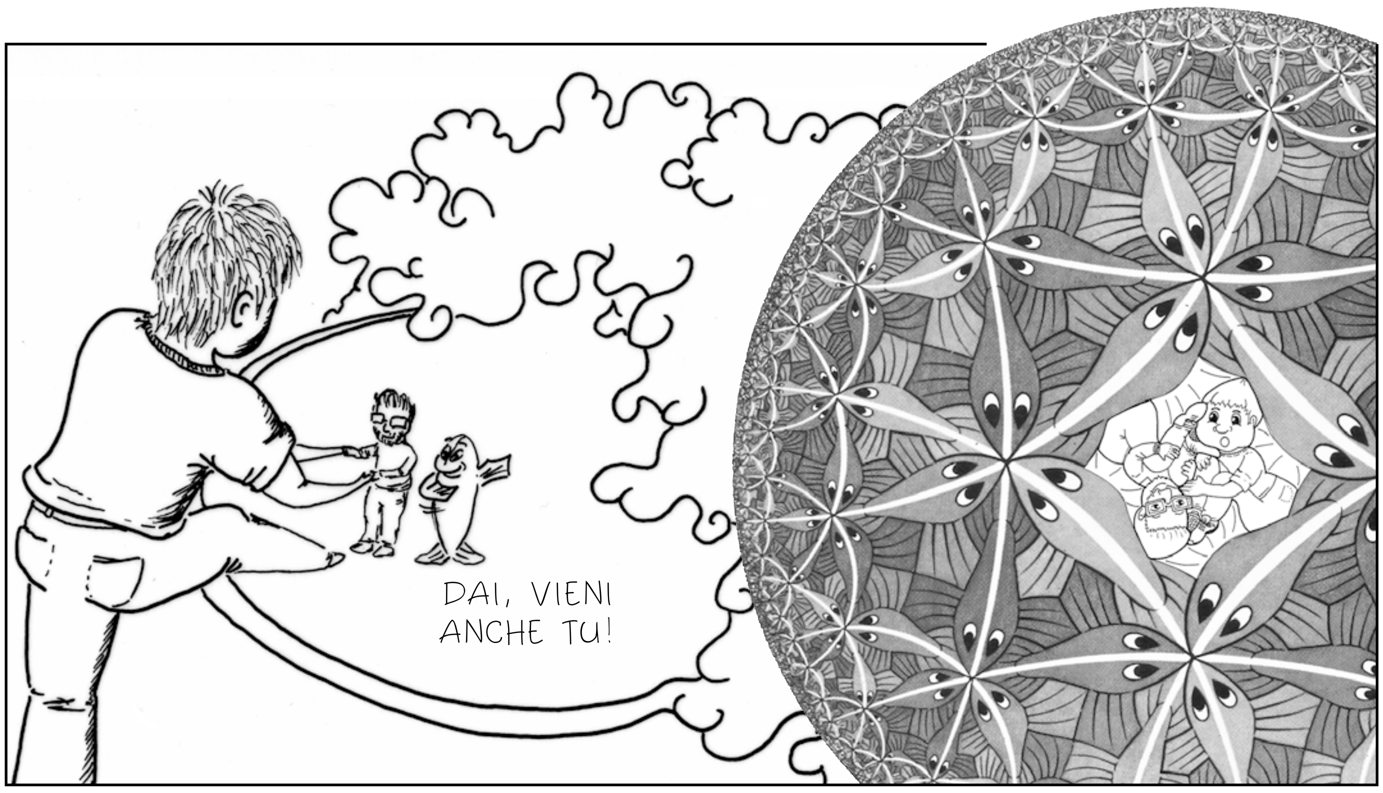
– LA CREPA RIMASE. I MATEMATICI NON SI RASSEGNARONO E TENTARONO IN OGNI MODO DI DIMOSTRARE IL QUINTO POSTULATO, CERCANDONE UNA FORMULAZIONE PIU' EVIDENTE OPPURE TENTANDO DI DIMOSTRARLO A PARTIRE DAGLI ALTRI QUATTRO, COME AVEVA GIA' PROVATO A FARE EUCLIDE.

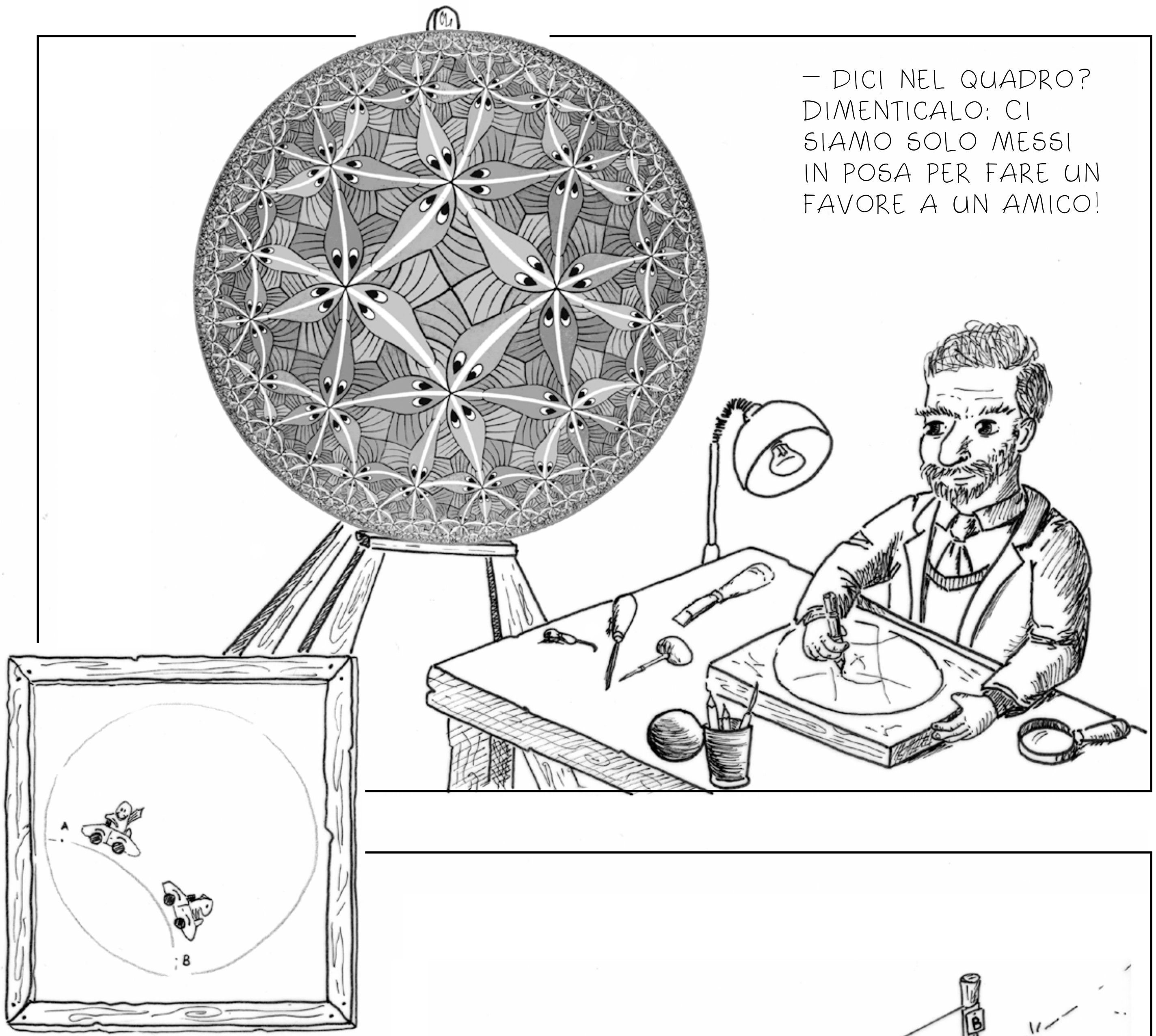
– STAI ATTENTO MARCO! SEMBRA CHE SACCHERI ABBIA RISOLTO IL PROBLEMA: IN REALTA' NON HA TROVATO UNA VERA E PROPRIA CONTRADDIZIONE, MA SOLO IPOTESI CONTROINTUITIVE. NEMMENO LUI E' RIUSCITO A CHIUDERE LA CREPA! POI, NELL' OTTOCENTO, DOPO SECOLI DI TENTATIVI, QUALCUNO RISOLSE LA QUESTIONE DRASTICAMENTE: ELIMINANDO IL V POSTULATO!

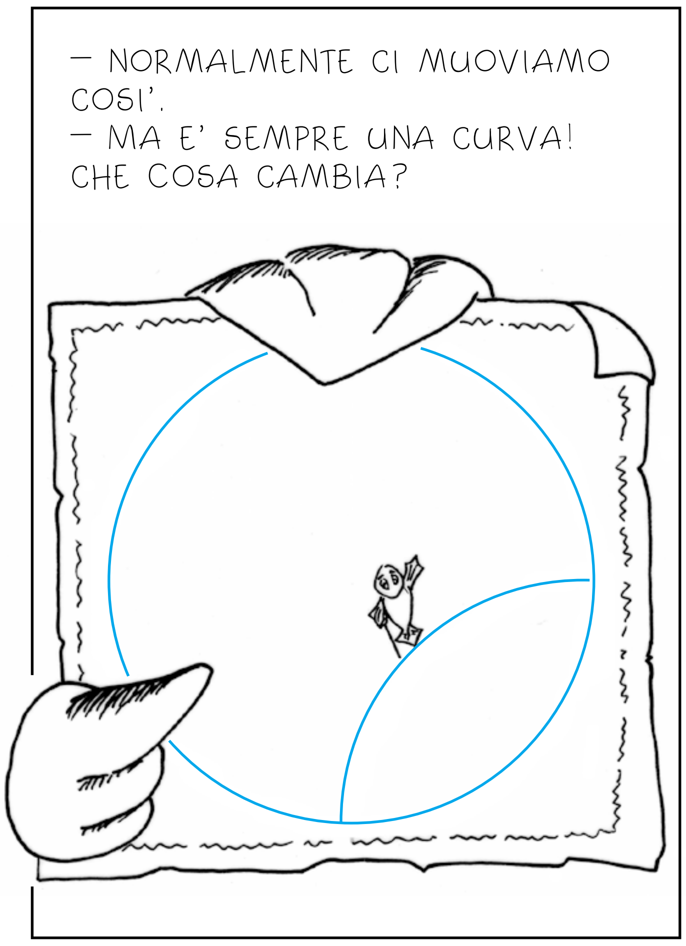


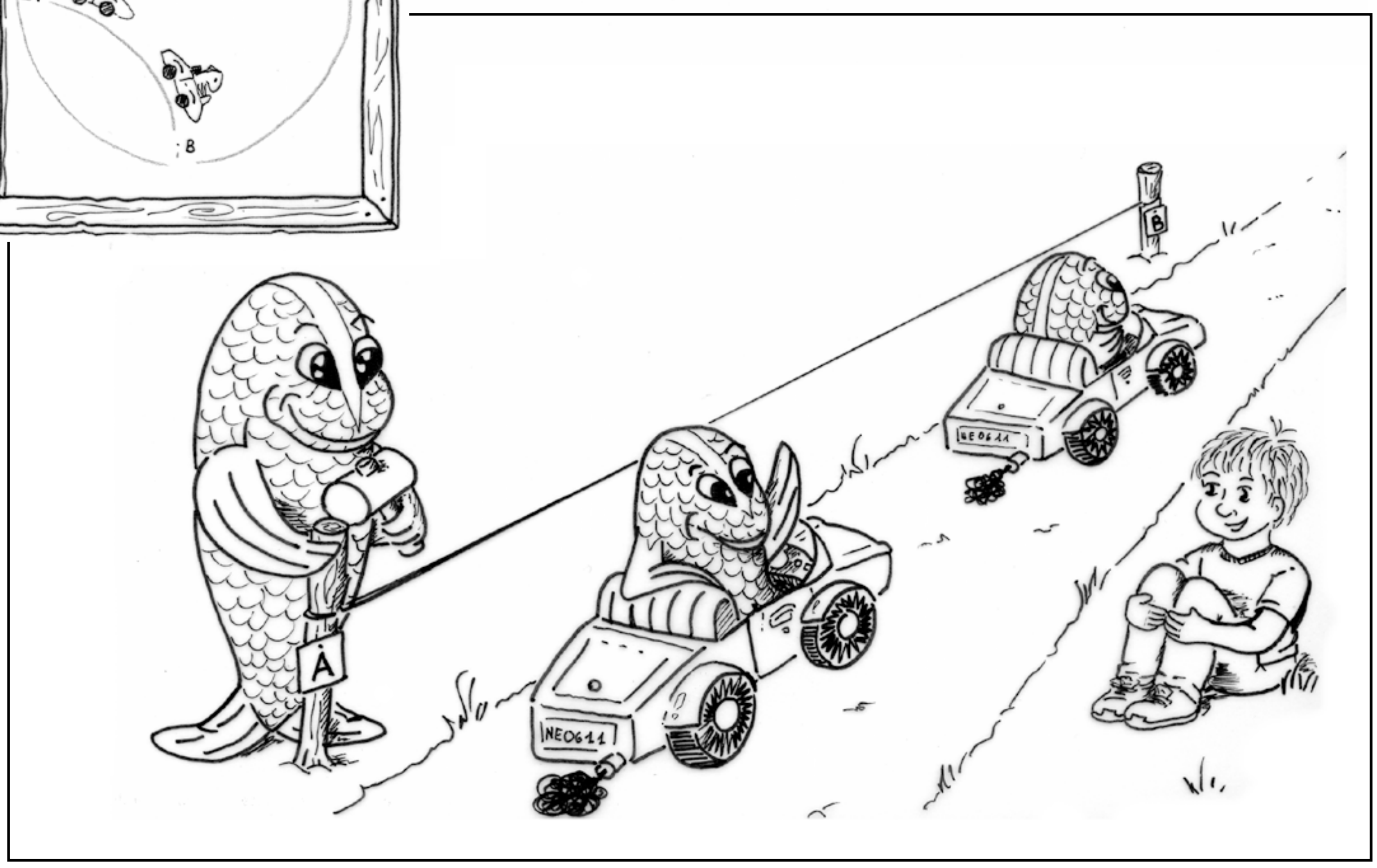


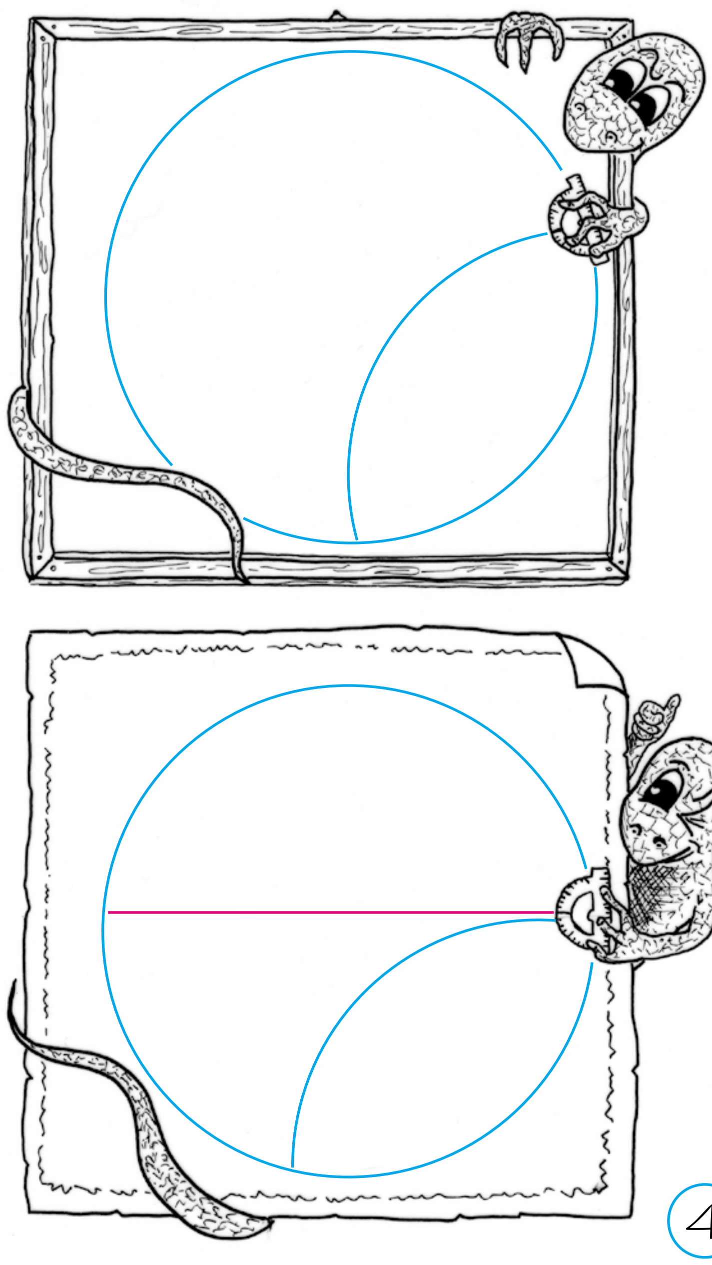
— PER RIEMANN, INVECE, DUE RETTE QUALSIASI DI UN PIANO HANNO SEMPRE UN PUNTO IN COMUNE. E' LA GEOMETRIA SFERICA.
GEORG FRIEDRICH BERNARD RIEMANN 1826-1866
MA ALLORA MI HAI FATTO STUDIARE DELLE COSE SBAGLIATE! IO NON CI CAPISCO NIENTE. COME POSSONO ESSERCI GEOMETRIE TANTO STRANE? IL QUINTO POSTULATO E' COSI' OVVIO!
NON PREOCCUPARTI SE TI SEMBRA STRANO: RICORDI COSA PENSAVA GAUSS? AVEVA RAGIONE: ANCHE I MATEMATICI DELL'OTTOCENTO NON ACCETTARONO QUESTE NUOVE GEOMETRIE. MA ORA SEGUIMI: VOGLIO FARTI VEDERE IL MONDO MERAVIGLIOSO CREATO DA BOLYAI!
STRISCIA di MOEBIUS
M.C. ESCHER
Attestato
LIMITE DEL CERCHIO III
M.C. ESCHER
VEDI QUEL QUADRO DI ESCHER ALLA PARETE? RAPPRESENTA UN MONDO IPERBOLICO. PROVA A FARE QUATTRO CHIACCHIERE CON I PESCI CHE CI ABITANO!
ELEMENTI VOL. I
EUCLIDE
VOGLIO PARLARE CON QUELLI GRANDI AL CENTRO. SONO COSI' GROSSI CHE SARANNO SICURAMENTE I PIU' IMPORTANTI! EHI, PESCE!
TI SBAGLI! IL NOSTRO E' UN MONDO MOLTO DEMOCRATICO: NOI PESCI SIAMO TUTTI UGUALI! VIENI A VEDERE SE NON CI CREDI!
— IO SONO ALTO 180 CM, MA PIU' MI AVVICINO AL BORDO PIU' MI VEDI RIMPICCIOLIRE, PERCHE' STO ANDANDO MOLTO LONTANO, INFINITAMENTE LONTANO DAL CENTRO. PER QUANTO IO CONTINUI A CAMMINARE, NON RIUSCIRO' MAI A RAGGIUNGERE IL BORDO!











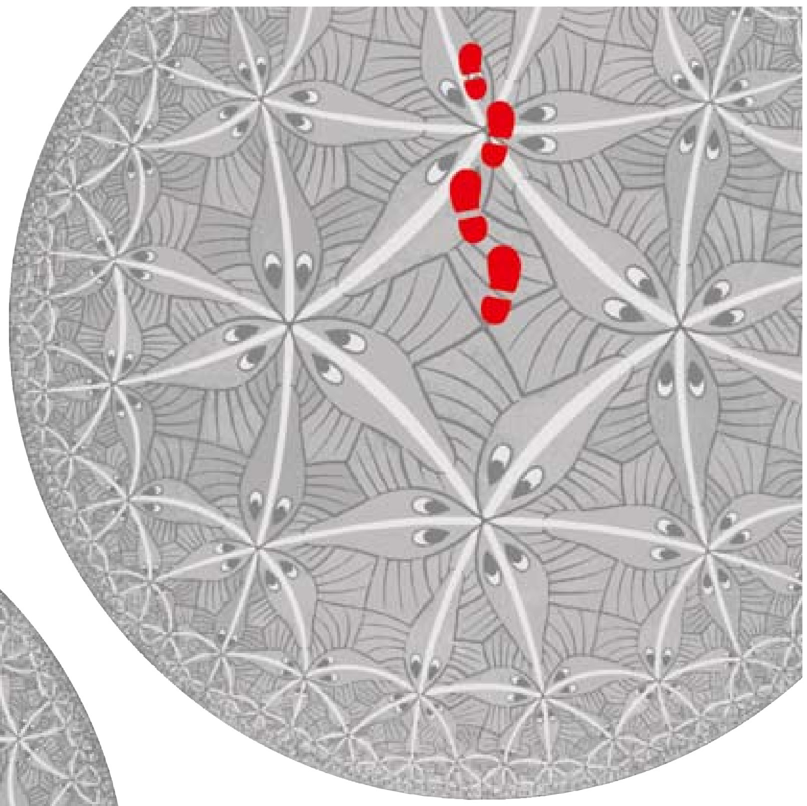
– QUESTA NON E' UNA CURVA QUALSIASI! E' UN ARCO DI CIRCONFERENZA PERPENDICOLARE AL BORDO DEL NOSTRO MONDO. O MEGLIO, COSI' SEMBRA A CHI GUARDA IL NOSTRO MONDO DA FUORI. CIOE, COSI' SEMBRA NEL MODELLO CHE VOI EUCLIDEANI UTILIZZATE PER RAPPRESENTARLO. MA PER NOI SI TRATTA DI RETTE, CIOE' DELLA STRADA PIU' CORTA TRA DUE PUNTI. SAI, NOI PESCI SIAMO UN PO' PIGRI!

– SECONDO ME C'E' QUALCOSA DI PIU' STRANO DELLE RETTE. TI VA DI DISEGNARE UNA CIRCONFERENZA? PARTIAMO CON UN RAGGIO DI 4 PASSI. LA CIRCONFERENZA SARA' LUNGA...?

– 4 PASSI MOLTIPLICATO PER 6,28. MA PAPA', COME FACCIO A FARE 25,12 PASSI?

– ARROTONDA A 25!

– 1, 2, 3... 25! EHI PAPA'! NON SONO MICA RITORNATO AL PUNTO DI PARTENZA!

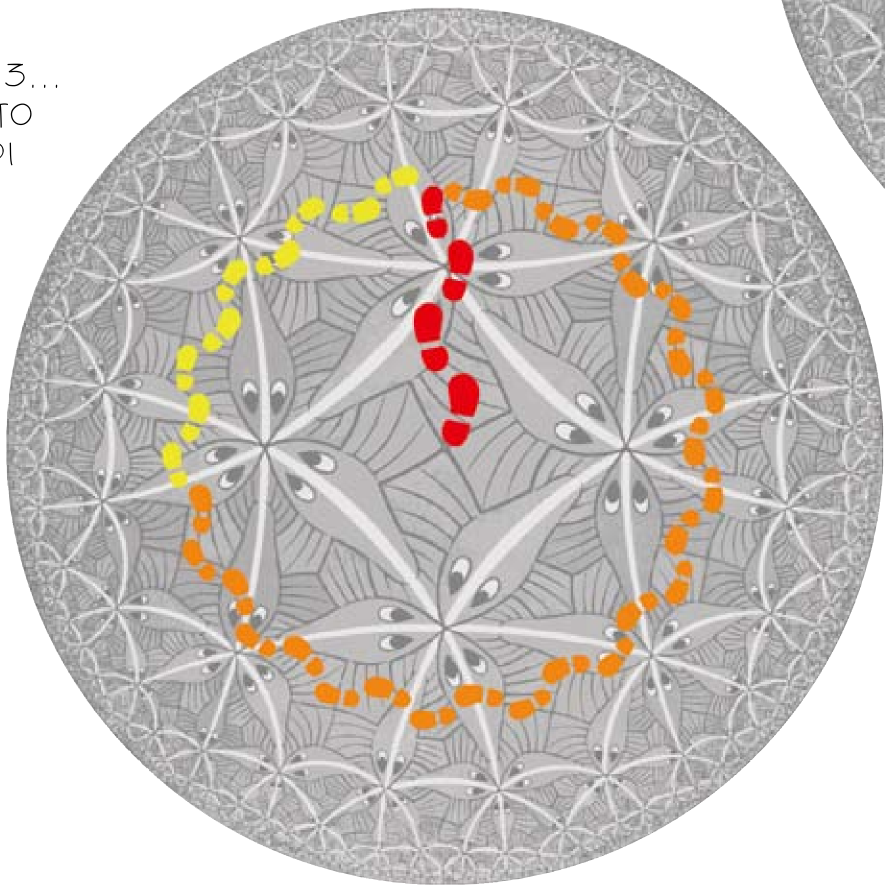


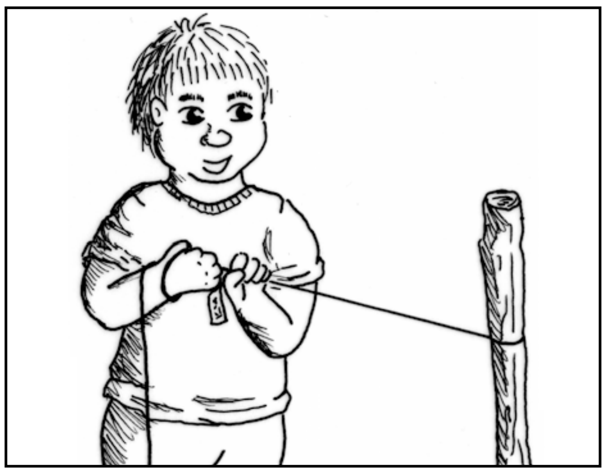
– QUANTI PASSI TI MANCANO?

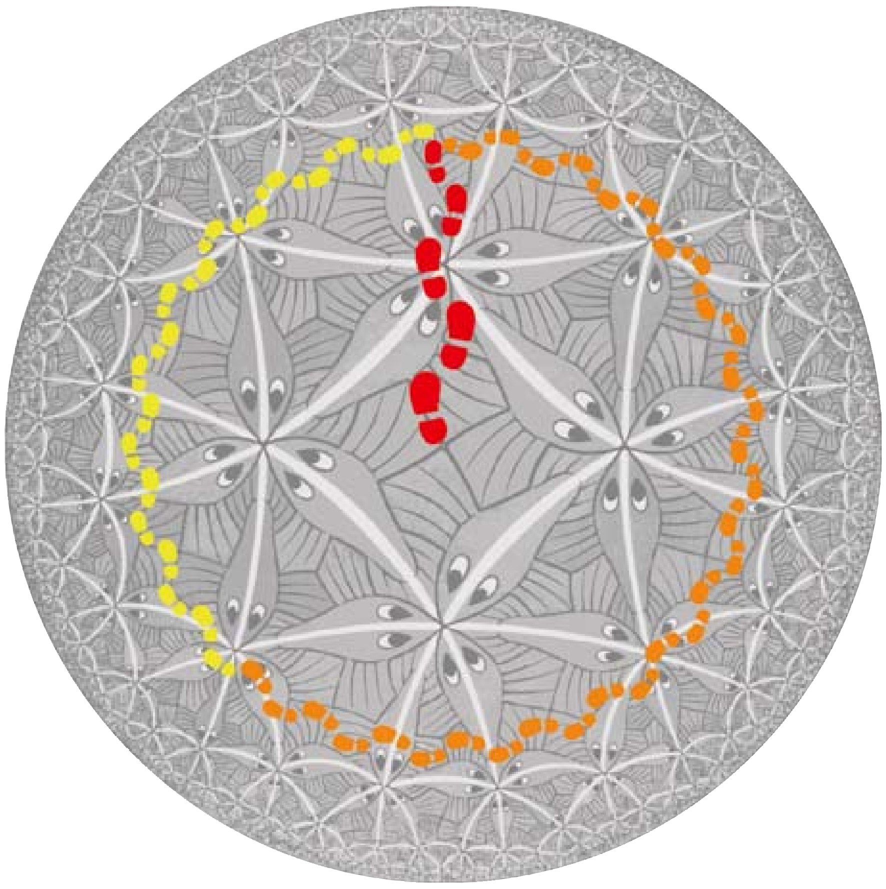
– ASPETTA CHE LI CONTO: 1, 2, 3... 9 PASSI. CHE STRANO: IN QUESTO MONDO, UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO 4 E' LUNGA 34! NON CI CREDO. VOGLIO PROVARE CON UN RAGGIO PIU' LUNGO. SE IL MIO RAGGIO E' DI 5 PASSI, DOVREI AVERE UNA CIRCONFERENZA DI 31,4 CHE ARROTONDO A 31. 1,2,3,... 31 E SONO SOLO A POCO PIU' DI META'! PAPA', QUESTA VOLTA MI MANCANO 19 PASSI. CON UN RAGGIO DI 5 HO OTTENUTO UNA CIRCONFERENZA DI 50!

– COSA PUOI CONCLUDERE?

– BE', DI SICURO CHE LE FORMULE SOLITE QUI NON FUNZIONANO!



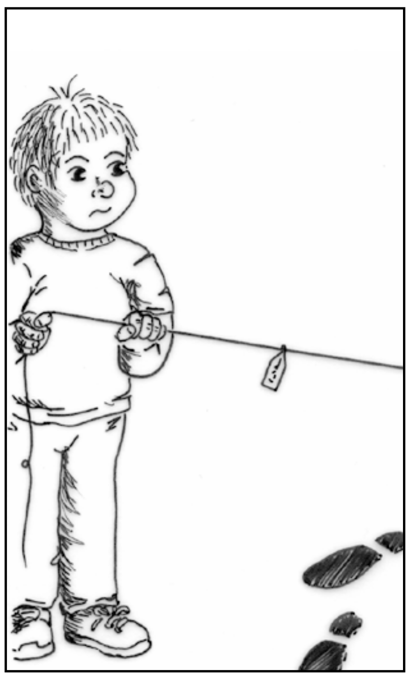


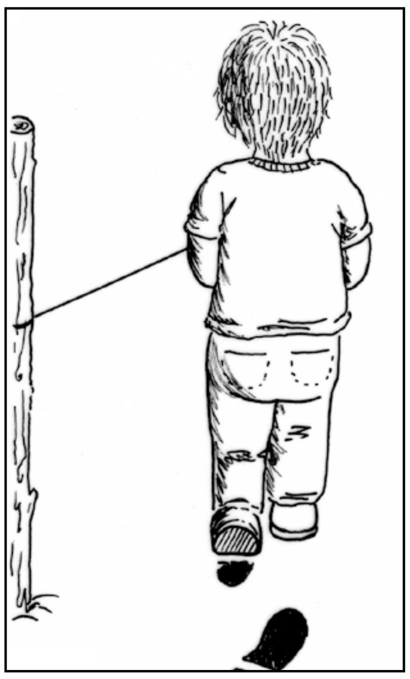


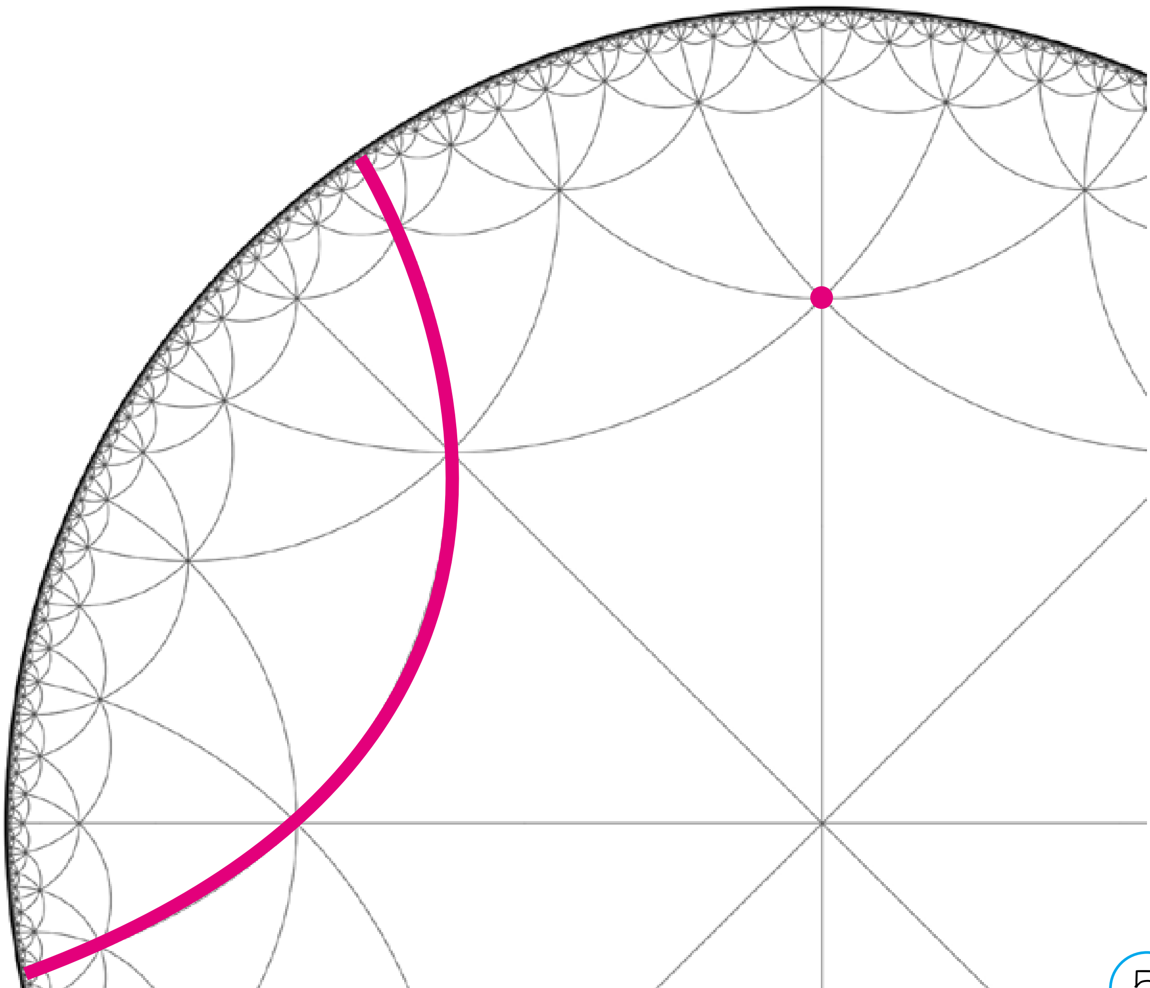
– ESATTO. IL RAPPORTO TRA CIRCONFERENZA E RAGGIO, CHE IN GEOMETRIA EUCLIDEA E' COSTANTE E DEFINITO COME 2π, QUI VARIA, E IN PARTICOLARE AUMENTA ALL'AUMENTARE DELLA CIRCONFERENZA.
E AUMENTA TANTO! PENSA SOLO ALLA DIFFERENZA TRA LE DUE CIRCONFERENZE CON RAGGIO 4 E 5. SE AVESSI FATTO UN RAGGIO DI 6, NON SARESTI ARRIVATO NEMMENO A META' CON I PASSI PREVISTI. EH SI', IN GEOMETRIA IPERBOLICA C'E' MOLTO PIU' SPAZIO DI QUELLO A CUI SIAMO ABITUATI.

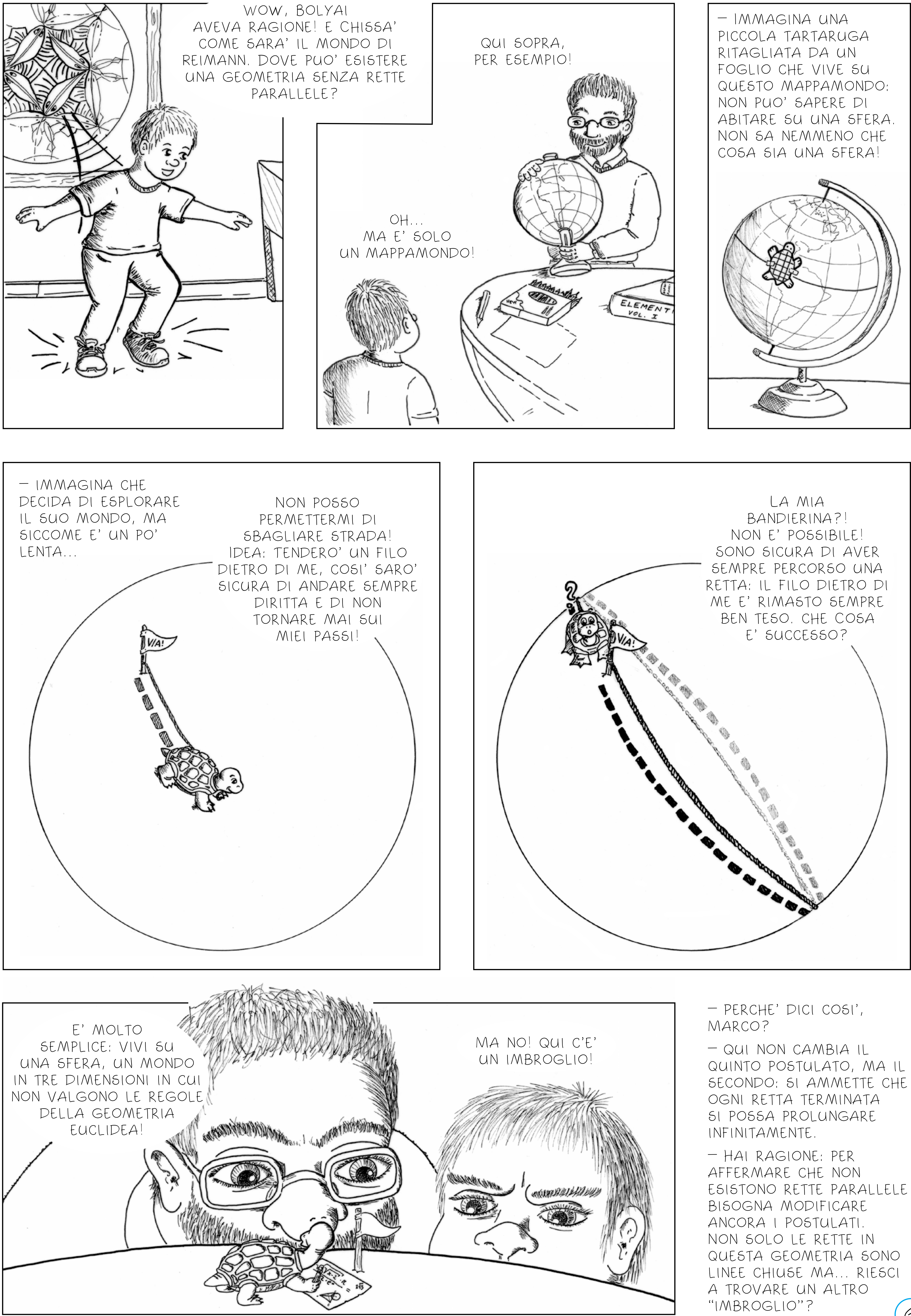
– MA PAPA', TRA TUTTE QUESTE COSE COSI' STRANE NON MI HAI ANCORA FATTO VEDERE COME FANNO DUE RETTE DISTINTE A PASSARE PER UNO STESSO PUNTO E AD ESSERE PARALLELE AD UNA STESSA RETTA!

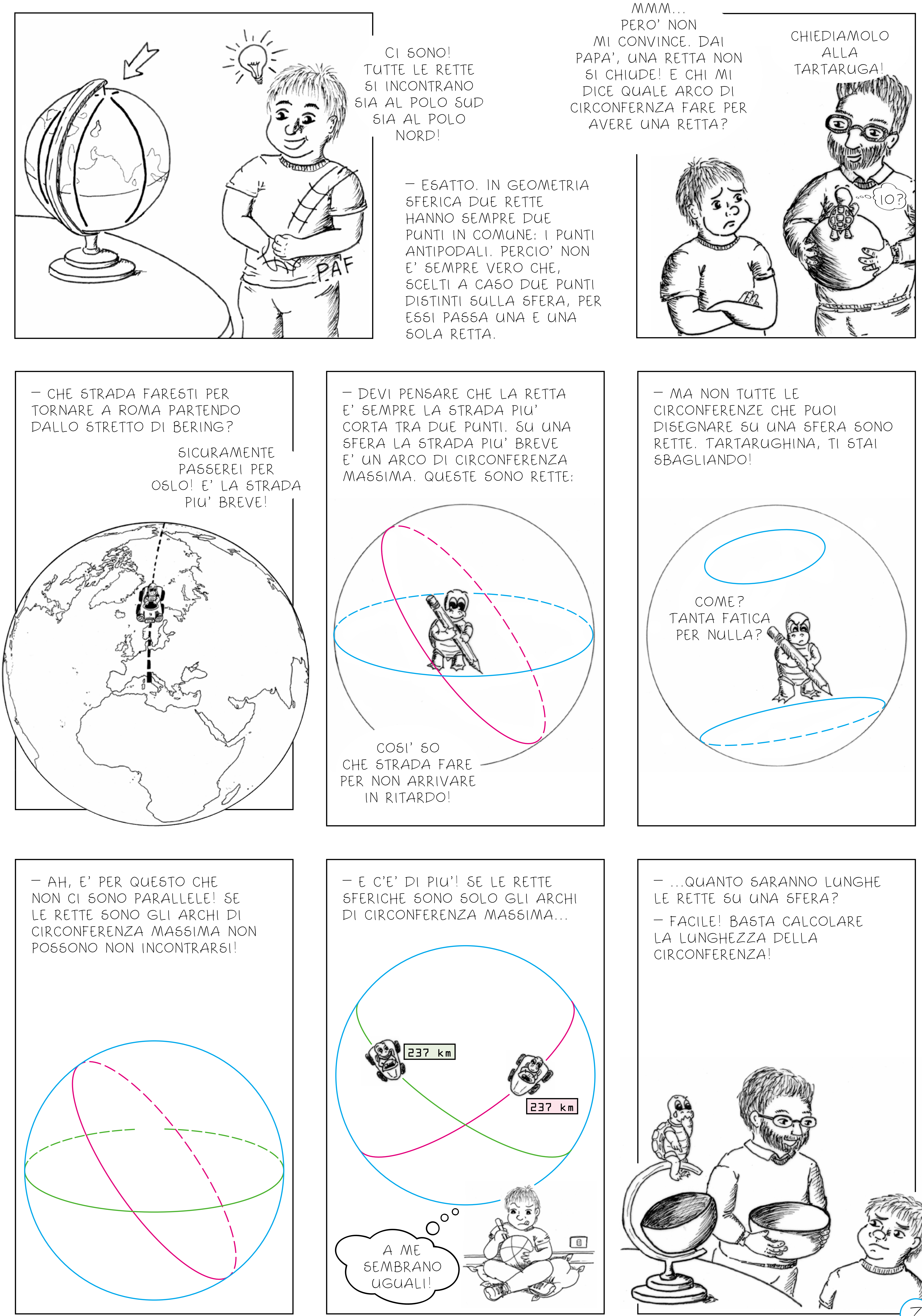
– MA E' FACILE! PROVA A DISEGNARLE E LO VEDRAI ANCHE TU!

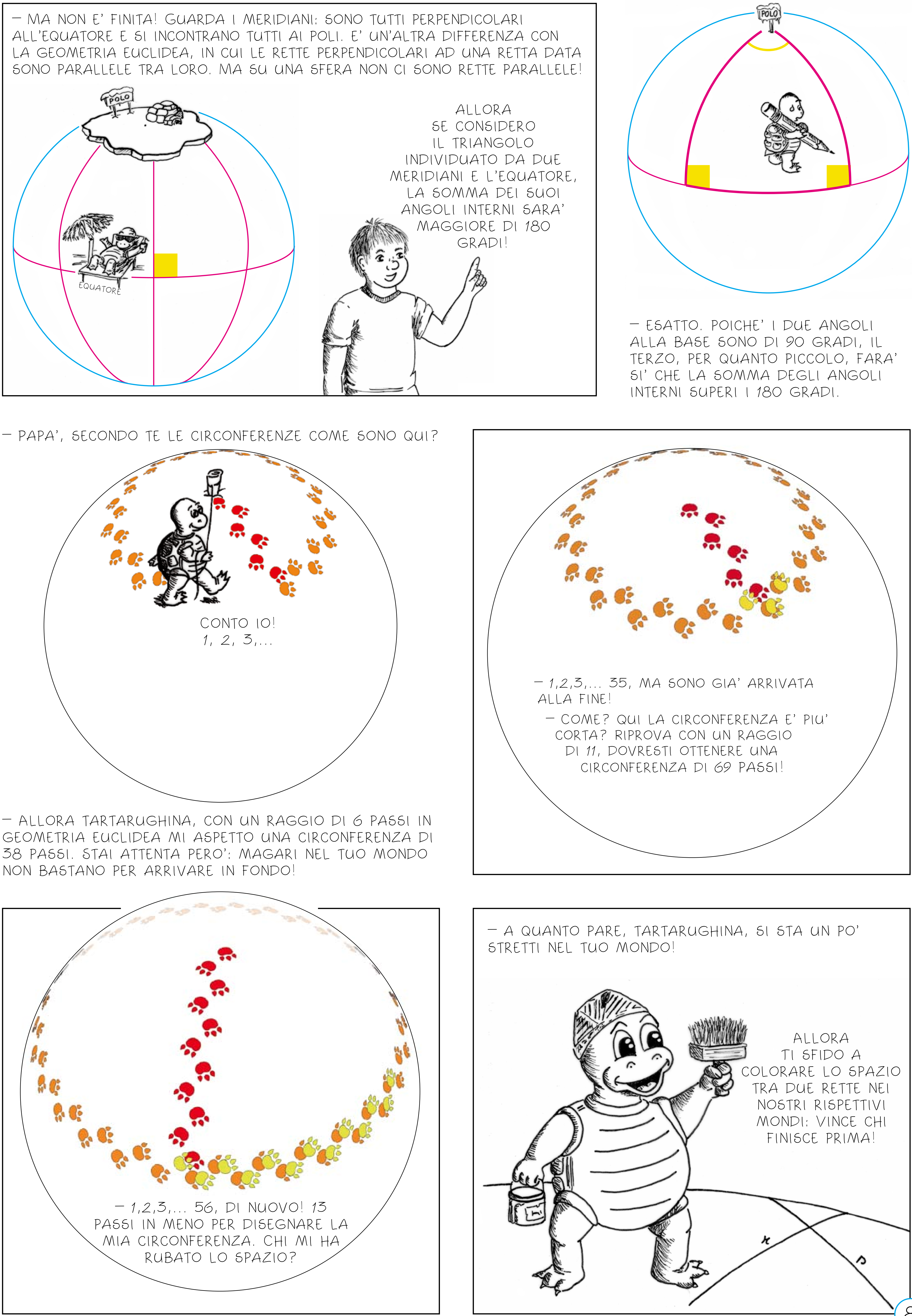


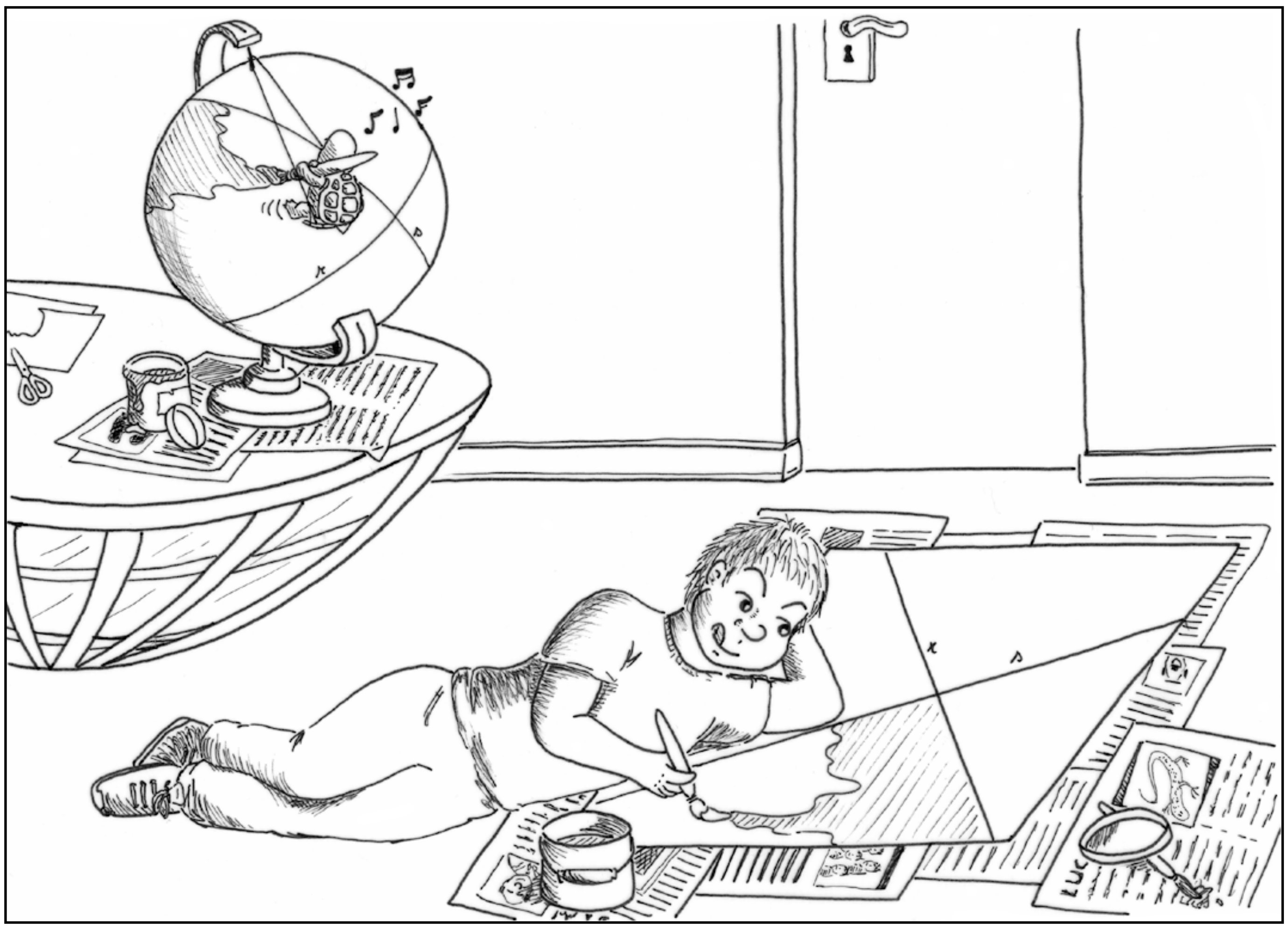


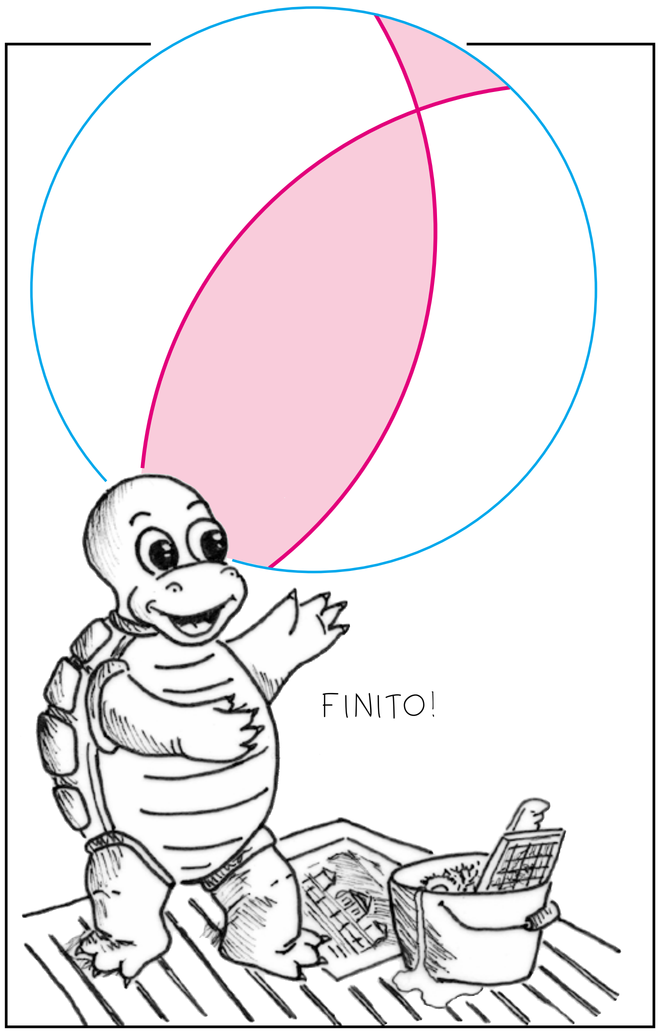



WOW, BOLYAI AVEVA RAGIONE! E CHISSA' COME SARA' IL MONDO DI REIMANN. DOVE PUO' ESISTERE UNA GEOMETRIA SENZA RETTE PARALLELE?
QUI SOPRA, PER ESEMPIO!
OH... MA E' SOLO UN MAPPAMONDO!
ELEMENTI VOL. I
— IMMAGINA UNA PICCOLA TARTARUGA RITAGLIATA DA UN FOGLIO CHE VIVE SU QUESTO MAPPAMONDO: NON PUO' SAPERE DI ABITARE SU UNA SFERA. NON SA NEMMENO CHE COSA SIA UNA SFERA!
— IMMAGINA CHE DECIDA DI ESPLORARE IL SUO MONDO, MA SICCOME E' UN PO' LENTA...
NON POSSO PERMETTERMI DI SBAGLIARE STRADA! IDEA: TENDERO' UN FILO DIETRO DI ME, COSI' SARO' SICURA DI ANDARE SEMPRE DIRITTA E DI NON TORNARE MAI SUI MIEI PASSI!
VIA!
LA MIA BANDIERINA?! NON E' POSSIBILE! SONO SICURA DI AVER SEMPRE PERCORSO UNA RETTA: IL FILO DIETRO DI ME E' RIMASTO SEMPRE BEN TESO. CHE COSA E' SUCCESSO?
?
VIA!
E' MOLTO SEMPLICE: VIVI SU UNA SFERA, UN MONDO IN TRE DIMENSIONI IN CUI NON VALGONO LE REGOLE DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA!
MA NO! QUI C'E' UN IMBROGLIO!
— PERCHE' DICI COSI', MARCO?
— QUI NON CAMBIA IL QUINTO POSTULATO, MA IL SECONDO: SI AMMETTE CHE OGNI RETTA TERMINATA SI POSSA PROLUNGARE INFINITAMENTE.
— HAI RAGIONE: PER AFFERMARE CHE NON ESISTONO RETTE PARALLELE BISOGNA MODIFICARE ANCORA I POSTULATI. NON SOLO LE RETTE IN QUESTA GEOMETRIA SONO LINEE CHIUSE MA... RIESCI A TROVARE UN ALTRO "IMBROGLIO"?


CI SONO! TUTTE LE RETTE SI INCONTRANO SIA AL POLO SUD SIA AL POLO NORD!
PAF
– ESATTO. IN GEOMETRIA SFERICA DUE RETTE HANNO SEMPRE DUE PUNTI IN COMUNE: I PUNTI ANTIPODALI. PERCIO' NON E' SEMPRE VERO CHE, SCELTI A CASO DUE PUNTI DISTINTI SULLA SFERA, PER ESSI PASSA UNA E UNA SOLA RETTA.
MMM... PERO' NON MI CONVINCE. DAI PAPA', UNA RETTA NON SI CHIUDE! E CHI MI DICE QUALE ARCO DI CIRCONFERNZA FARE PER AVERE UNA RETTA?
CHIEDIAMOLO ALLA TARTARUGA!
IO?
– CHE STRADA FARESTI PER TORNARE A ROMA PARTENDO DALLO STRETTO DI BERING?
SICURAMENTE PASSEREI PER OSLO! E' LA STRADA PIU' BREVE!
– DEVI PENSARE CHE LA RETTA E' SEMPRE LA STRADA PIU' CORTA TRA DUE PUNTI. SU UNA SFERA LA STRADA PIU' BREVE E' UN ARCO DI CIRCONFERENZA MASSIMA. QUESTE SONO RETTE:
COSI' SO CHE STRADA FARE PER NON ARRIVARE IN RITARDO!
– MA NON TUTTE LE CIRCONFERENZE CHE PUOI DISEGNARE SU UNA SFERA SONO RETTE. TARTARUGHINA, TI STAI SBAGLIANDO!
COME? TANTA FATICA PER NULLA?
– AH, E' PER QUESTO CHE NON CI SONO PARALLELE! SE LE RETTE SONO GLI ARCHI DI CIRCONFERENZA MASSIMA NON POSSONO NON INCONTRARSI!
– E C'E' DI PIU'! SE LE RETTE SFERICHE SONO SOLO GLI ARCHI DI CIRCONFERENZA MASSIMA...
237 km
237 km
A ME SEMBRANO UGUALI!
– ...QUANTO SARANNO LUNGHE LE RETTE SU UNA SFERA?
– FACILE! BASTA CALCOLARE LA LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA!


– MA NON E' FINITA! GUARDA I MERIDIANI: SONO TUTTI PERPENDICOLARI ALL'EQUATORE E SI INCONTRANO TUTTI AI POLI. E' UN'ALTRA DIFFERENZA CON LA GEOMETRIA EUCLIDEA, IN CUI LE RETTE PERPENDICOLARI AD UNA RETTA DATA SONO PARALLELE TRA LORO. MA SU UNA SFERA NON CI SONO RETTE PARALLELE!
POLO
EQUATORE
ALLORA SE CONSIDERO IL TRIANGOLO INDIVIDUATO DA DUE MERIDIANI E L'EQUATORE, LA SOMMA DEI SUOI ANGOLI INTERNI SARA' MAGGIORE DI 180 GRADI!
POLO
– ESATTO. POICHE' I DUE ANGOLI ALLA BASE SONO DI 90 GRADI, IL TERZO, PER QUANTO PICCOLO, FARA' SI' CHE LA SOMMA DEGLI ANGOLI INTERNI SUPERI I 180 GRADI.
– PAPA', SECONDO TE LE CIRCONFERENZE COME SONO QUI?
CONTO IO! 1, 2, 3,...
– ALLORA TARTARUGHINA, CON UN RAGGIO DI 6 PASSI IN GEOMETRIA EUCLIDEA MI ASPETTO UNA CIRCONFERENZA DI 38 PASSI. STAI ATTENTA PERO': MAGARI NEL TUO MONDO NON BASTANO PER ARRIVARE IN FONDO!
– 1,2,3,... 35, MA SONO GIA' ARRIVATA ALLA FINE!
– COME? QUI LA CIRCONFERENZA E' PIU' CORTA? RIPROVA CON UN RAGGIO DI 11, DOVRESTI OTTENERE UNA CIRCONFERENZA DI 69 PASSI!
– 1,2,3,... 56, DI NUOVO! 13 PASSI IN MENO PER DISEGNARE LA MIA CIRCONFERENZA. CHI MI HA RUBATO LO SPAZIO?
– A QUANTO PARE, TARTARUGHINA, SI STA UN PO' STRETTI NEL TUO MONDO!
ALLORA TI SFIDO A COLORARE LO SPAZIO TRA DUE RETTE NEI NOSTRI RISPETTIVI MONDI: VINCE CHI FINISCE PRIMA!
r
p





– IN GEOMETRIA SFERICA, DIVERSAMENTE DA QUELLA EUCLIDEA, DUE RETTE RACCHIUDONO UN'AREA. LA PROSSIMA VOLTA PENSACI PRIMA DI ACCETTARE LA SFIDA!