IL GIOCO DEL 15.
OVVERO: 1000$ PER SPOSTARE DUE BLOCCHETTI

EMANUELE DELUCCHI, GIOVANNI GAIFFI, LUDOVICO PERNAZZA

Molti fra i lettori si saranno divertiti a giocare al gioco del 15, uno dei più celebri fra i giochi con "blocchetti mobili" che possono scorrere attraverso spazi vuoti. Ecco la *configurazione di base* del gioco:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

In generale, chiameremo *configurazione* una qualsiasi disposizione dei blocchetti. Giocare una partita significa cominciare da una qualunque configurazione e riuscire a far scorrere i blocchetti in modo da ricreare la configurazione di base.

L'invenzione del gioco del 15 risale alla seconda metà dell'ottocento e sembra sia dovuta ad un portalettere americano, Noyes Chapman, anche se il famoso inventore di giochi Samuel Loyd cercò sempre di attribuirsene la paternità, includendolo nella sua *Cyclopedia of Puzzles* (vedi [6] e [9]). Loyd offrì addirittura un premio di 1000$ a chi avesse risolto la configurazione ottenuta dalla configurazione di base "scambiando" il 14 e il 15, come illustrato nella riproduzione del disegno originale in Figura 1.

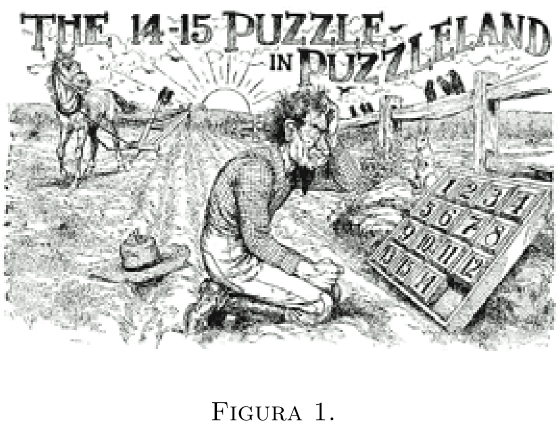


FIGURA 1.

In realtà, questa configurazione del gioco era già stata proposta da Chapman: per questo la chiameremo *configurazione di Chapman*.

Molti fra i lettori, dicevamo, avranno giocato qualche partita al gioco del 15. E siamo certi che, fra una risoluzione più rapida e una più intricata, l'intuito matematico avrà avuto modo di interpellarli con alcune domande: si può indicare una strategia generale per risolvere il gioco del 15? Ma prima di tutto: è sempre possibile risolverlo? E se sì, come si fa nel caso della configurazione di Chapman?

In particolare, chi ha passato del tempo a provare ad ottenere la configurazione di Chapman partendo dalla configurazione di base sarà particolarmente "motivato" a scoprire i segreti del gioco. E lo sarà ancora di più se ha notato che, levando i blocchetti dalla scatola quadrata (in alcuni modelli in commercio è possibile farlo), rimischiandoli e poi riposizionandoli nella scatola può accadere di trovare configurazioni dalle quali si ottiene facilmente la configurazione di Chapman (ma a quel punto... da qui sarà possibile ottenere la configurazione di base?).

Tutto sommato l'intuizione suggerisce al giocatore esperto che la risposta alla domanda sulla configurazione di Chapman deve essere: "no, non è ottenibile partendo dalla configurazione base". Ma ci si rende subito conto che è difficile poter motivare questa intuizione con un ragionamento per casi: il numero di tutte le combinazioni di mosse possibili è troppo alto e bisognerebbe mostrare che nessuna di queste combinazioni porta alla configurazione di Chapman...

Per illustrare quale tipo di ragionamento può venire in aiuto in una simile situazione facciamo un esempio di tutt'altra natura: supponiamo di avere 100 biscotti, e di offrirli ad un gruppo di amici. Imponiamo però una regola: ognuno dei nostri amici potrà prenderne, a sua scelta, zero, due, quattro, sei, oppure otto. Se qualcuno ci chiedesse: "è possibile che alla fine, nel vassoio, rimangano 5 biscotti?", prontamente risponderemmo di no. Infatti, anche se non sappiamo esattamente quanti biscotti prende ciascuno dei nostri amici e, magari, non sappiamo neppure quanti amici sono presenti, siamo però sicuri che, dopo la scelta di ognuno di loro il numero di biscotti nel vassoio rimane pari. In altre parole, anche se tale numero subisce delle variazioni, la sua proprietà di essere pari **non varia**.

Questo semplice esempio illustra il concetto di *invariante* di un gioco: detto in termini più generali un invariante è una funzione che associa ad ogni configurazione del gioco C un numero $F(C)$, con la proprietà che, se facciamo una qualunque mossa del gioco e da C passiamo a C', allora $F(C) = F(C')$ (la funzione "non varia"). Se si conosce un invariante e troviamo configurazioni a cui questo invariante associa numeri diversi, siamo certi che queste configurazioni **non** possono essere collegate dalle mosse del gioco.

Nal caso del gioco del 15 l'invariante, un vero "colpo d'ala" che permette di rispondere alle nostre domande, c'è ma non è così semplice da trovare; riguarda infatti il legame del gioco col *gruppo delle permutazioni* su 16 elementi. Non approfondiremo qui l'aspetto algebrico della questione, ma descriveremo direttamente l'invariante che, forse già noto a Loyd e ai primi "pionieri" del gioco, fu presentato da W.W. Johnson nel 1879 sull' American Journal of Mathematics (vedi [5]).

Lo strumento decisivo da considerare è la *somma del 15.* Prendiamo una configurazione del gioco C: diciamo che un blocchetto *viene dopo* un altro se si trova in una riga più bassa o sulla stessa riga, ma a destra del blocchetto dato (insomma, nell'ordine in cui si legge un testo nelle lingue neolatine). Con l'aggiunta di un po' di fantasia pensiamo allo spazio vuoto come ad un blocchetto con sopra scritto il numero 16. Questo ci permette di ordinare i blocchetti in un elenco $b_1, b_2, \ldots, b_{15}, b_{16}$.

Ora si consideri, per ogni blocchetto b_i, il numero n_{b_i} di blocchetti che vengono dopo di lui e recano un numero minore del suo. Per ogni configurazione C chiamiamo poi $dist_C$ il numero minimo di mosse che si devono fare per portare lo spazio vuoto nell'angolo in basso a destra (in altre parole è la "distanza" dello spazio vuoto dall'angolo in basso a destra). Siamo pronti per definire la somma del 15 per la configurazione C:

$$S_C = n_{b_1} + n_{b_2} \ldots + n_{b_{15}} + n_{b_{16}} + dist_C$$

Una mossa del gioco ci porta da una configurazione C ad una nuova configurazione C' e se facciamo i conti su qualche esempio osserviamo subito che $S_{C'}$ può essere diverso da S_C. Ma approfondiamo la nostra analisi. Ci sono essenzialmente quattro tipi di mosse possibili: infatti una mossa è uno spostamento del quadratino vuoto e questo spostamento può avvenire verso destra, verso sinistra, verso l'alto o verso il basso. Uno studio dettagliato di ciascuno di questi quattro tipi di mossa (vedi BOX "L'invariante...alla prova di una mossa.") mostra che, anche se $S_{C'}$ è diverso da S_C, la **parità** dei due numeri è la stessa (per esempio, se S_C è pari lo è anche $S_{C'}$). L'essere "pari" o "dispari" è dunque un invariante del gioco del 15 (se vogliamo possiamo pensare ad una funzione F che vale 0 sulle configurazioni con somma pari e 1 su quelle con somma dispari).

Consideriamo una mossa del tipo "si sposta il quadratino bianco verso l'alto", come in questo esempio:

11	1	3	4
2	10	14	8
15	7		5
9	6	13	12

11	1	3	4
2	10		8
15	7	14	5
9	6	13	12

La somma del 15 della configurazione C a sinistra, prima della mossa, è:

$$\underbrace{10+0+1+1+0+5}_{\textit{primi sei blocchetti}}+\underbrace{7+3+6+2+5}_{\textit{blocchetti intermedi}}+\underbrace{0+1+0+1+0}_{\textit{ultimi cinque blocchetti}}+\underbrace{2}_{dist_C}=44.$$

La somma del 15 della configurazione C' a destra, dopo la mossa è:

$$\underbrace{10+0+1+1+0+5}_{\textit{primi sei blocchetti}}+\underbrace{9+3+7+2+5}_{\textit{blocchetti intermedi}}+\underbrace{0+1+0+1+0}_{\textit{ultimi cinque blocchetti}}+\underbrace{3}_{dist_{C'}}=48.$$

Si osserva subito che, per una mossa di questo tipo, in cui, diciamo, il blocchetto b_i di C "scende" e diventa il blocchetto b_{i+4} di C', il contributo di ciascuno dei blocchetti che vengono prima del blocchetto che viene spostato (i blocchetti b_j con $j < i$) non cambia nelle due configurazioni. Lo stesso si può dire per il contributo dei blocchetti b_t con $t > i + 4$. Se ci riferiamo all'esempio in figura stiamo parlando dei primi sei blocchetti e degli ultimi cinque.

Il contributo complessivo dei blocchetti intermedi, invece, è diverso nelle due configurazioni ed è facile mostrare che cambia di parità. Nell'esempio si passa da 23 a 26 e in generale, se s è il numero di blocchetti intermedi che recano un numero minore di quello del blocchetto b_i, allora il contributo complessivo dei blocchetti intermedi cambierà del valore (dispari!) $7 - 2s$.

In compenso, nel nostro tipo di mossa, il quadratino bianco sale verso l'alto, e dunque la sua distanza dall'angolo in basso a destra aumenta di 1. Quindi $dist_{C'} = dist_C + 1$ e la somma del 15 nel suo complesso non cambia di parità.

A voi il divertimento di verificare cosa accade per gli altri tre tipi di mossa (quelle in cui c'è uno spostamento laterale sono molto più semplici da studiare).

Ora, è immediato osservare che la somma del 15 vale 0 per la configurazione di base. Possiamo dunque concludere che solo le configurazioni C con S_C pari hanno speranza di essere ricondotte alla configurazione di base. Ma la configurazione di Chapman ha per somma 1: dunque quel furbacchione del signor Loyd aveva un bel promettere premi – la configurazione di Chapman ha somma dispari e quindi *non* è risolubile!

Siamo proprio sicuri?

Per verificare di aver capito bene come entra in gioco la somma del 15, provate a rispondere alla seguente domanda. È possibile, partendo dalla configurazione base, ottenere la configurazione del gioco del 15 in cui i blocchetti sono disposti "a serpente" come nella figura?

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
	15	14	13

Resta da capire se tutte le configurazioni con uguale parità sono collegate da una serie di mosse. La risposta è sì, e deriva dall'osservazione che, data una qualunque configurazione pari, è sempre possibile raggiungere la configurazione di base. Da questo segue subito che due qualsiasi configurazioni pari sono "collegabili" con le mosse del gioco. Lo stesso discorso vale per le configurazioni dispari, ognuna delle quali può essere collegata alla configurazione di Chapman. Ma attenzione: la strategia di dimostrazione di questo fatto deve essere di natura diversa da quella della dimostrazione precedente. Prima si trattava di far vedere che *non esistono* mosse che fanno passare da una configurazione con somma pari ad una con somma dispari, ed è bastato trovare un invariante. Ora dobbiamo mostrare che *per ogni* configurazione pari esiste una serie di mosse che la collega alla configurazione di base. Una dimostrazione algebrica, sintetica e molto elegante di questo fatto si trova in [1]. Una via alternativa che possiamo percorrere è quella di descrivere un algoritmo, ossia una "strategia vincente", che si possa applicare a tutte le configurazioni pari.

Un trucco utile

Supponiamo di aver sistemato i blocchetti con i numeri 1,2,3 e di voler sistemare il 4. Le seguenti figure illustrano come possiamo fare, attraverso una serie di "rotazioni di cornici".

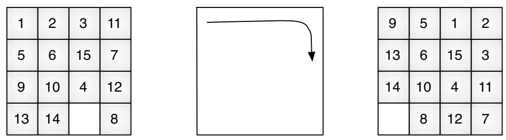


Figura 2. Facciamo ruotare la cornice esterna in senso orario fino a portare l'11 accanto al 4.

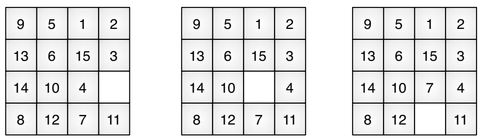


Figura 3. Facciamo scorrere un pezzo (quattro blocchetti) della cornice esterna ancora in senso orario fino a creare uno spazio alla destra del 4. A questo punto il 4 può entrare nella cornice esterna che però non contiene più lo spazio vuoto e dunque non può scorrere all'indietro. Per "sbloccarla" basta spostare un blocchetto – quello col numero 7 – verso l'interno.

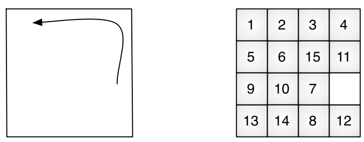


Figura 4. Ora possiamo concludere ruotando in senso antiorario la cornice esterna fino a portare i numeri 1,2,3,4 nella posizione desiderata (è in un certo senso la rotazione inversa a quella fatta all'inizio).

Questo trucco, applicato con semplici varianti, permette di elaborare una strategia generale di soluzione del gioco del 15.

Lasciamo ad ognuno il compito di provare questa strada, e indicare il suo algoritmo preferito. Un suggerimento potrebbe essere quello di dividere il problema in varie parti: per cominciare, non è difficile (per chi ha giocato abbastanza) descrivere con quali tipi di mosse si può riuscire a sistemare nel giusto ordine i blocchetti con i numeri 1,2,3,4,5,9,13 (può servire anche il trucco della cornice descritto nel box "Un trucco utile"), ossia la riga in alto e la colonna a sinistra. Resta un quadrato 3×3 da sistemare, in pratica un versione ridotta del gioco (un... "gioco del 9"). È facile (per esempio ancora col trucco della cornice) collocare i blocchetti 6,7,8 che costituiscono la prima riga di questa versione ridotta, e immediatamente dopo sistemare il 10. Conviene ora studiare in modo analitico i casi possibili, che non sono più molti (a questo punto le configurazioni con somma pari e in cui il quadratino vuoto si trova nell'angolo in basso a destra sono solo dodici: perché?).

Una interessante generalizzazione del gioco del 15 è stata proposta da R.M. Wilson in [7]. Supponiamo di disegnare sul piano un grafo connesso con n vertici, e di distribuire i numeri $1, 2, 3, 4, \ldots, n-1$ come etichette sui vertici, lasciando un vertice senza etichetta, come nella figura seguente.

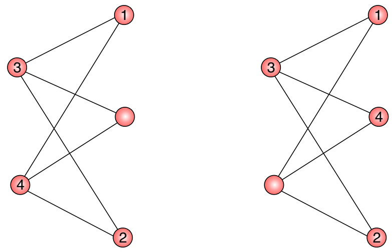


Figura 5. Il gioco su un grafo con cinque vertici. Esempio di una mossa in cui l'etichetta 4 viene spostata da un vertice all'altro.

A questo punto possiamo giocare facendo scorrere le etichette: se una etichetta si trova su di un vertice collegato da un arco al vertice senza etichetta, possiamo "farla scorrere lungo l'arco" e metterla sul vertice senza etichetta (il vertice da cui è partita resta dunque senza etichetta).
Quante configurazioni del gioco ci sono? Sono $n!$, ossia tante quanti i modi di piazzare le n etichette (contando anche quella vuota) sugli n vertici. E quali di queste configurazioni possono essere collegate dalle mosse del gioco? Nel gioco del 15, che è un gioco di questo tipo (vedi figura seguente), sappiamo che le configurazioni vengono divise in due grandi famiglie, quelle "pari" e quelle "dispari", collegabili al loro interno dalle mosse del gioco.

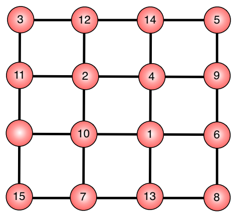
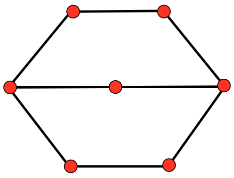


Figura 6. Il gioco del 15 sotto forma di gioco su un grafo.

Quello che accade in generale è molto interessante. Se il grafo è un ciclo di n vertici, il lettore mostrerà facilmente che l'insieme delle configurazioni si spezza in $(n-2)!$ famiglie. Se il grafo non è un ciclo, ma è comunque "biconnesso" (ossia, anche se cancelliamo un qualunque vertice e tutti gli archi che arrivano in quel vertice, la figura rimane connessa) ci sono invece due sole alternative: o le configurazioni sono tutte collegabili fra di loro dalle mosse del gioco, o si dividono in due famiglie. Dunque quello che accade per il gioco del 15 è un esempio di un fenomeno assai più generale. Quali tipi di grafi comportano questa divisione in due famiglie? La questione si fa difficile (il lettore interessato troverà la risposta in [7]), ma per fare un primo passo sapreste studiare il caso del grafo di Figura 5?
In realtà a quanto abbiamo raccontato c'è una eccezione (unica). È data dal seguente grafo biconnesso:



In quante famiglie si suddividono le sue $7! = 5040$ configurazioni?

Per concludere, vogliamo divertirci a fare qualche conto. Ci chiediamo: quante sono le configurazioni con somma pari nel gioco del 15?

Supponiamo di avere i blocchetti in mano e contiamo per prima cosa tutti i modi possibili di disporre i blocchetti nella scatola. Si tratta di contare tutti i modi di disporre 16 numeri (non solo 15, di fatto collochiamo anche il quadratino vuoto...) in 16 caselle, quindi la risposta è $16! = 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Ma non tutte le configurazioni così ottenute avranno somma pari. Qui viene in nostro aiuto un ragionamento di simmetria (e meno male: fare il calcolo diretto presenterebbe serie difficoltà). Infatti osserviamo che se abbiamo una configurazione con somma pari e immaginiamo di scrivere 1 sul blocchetto dove è scritto 15 e 15 sul blocchetto dove è scritto 1 (questo equivale a permutare i due blocchetti, ma attenzione, non pretendiamo di farlo con le mosse del gioco! − anzi dalla conclusione capirete che sarebbe impossibile farlo con le mosse consentite...) otteniamo una configurazione con somma dispari (come mai? Verificatelo!). E viceversa, se in una configurazione con somma dispari scambio l'1 e il 15 ottengo una configurazione con somma pari.

Allora le configurazioni con somma pari e quelle con somma dispari sono in ugual numero: le possiamo infatti far corrispondere a due due tramite questo scambio dell'1 col 15. Dunque le configurazioni pari sono la metà del totale, ossia

$$\frac{16!}{2} = 10'461'394'944'000.$$

Certo alcune di queste configurazioni saranno di risoluzione molto facile o immediata (fra queste c'è per esempio la configurazione di base, nel qual caso la partita termina all'istante) ma, come vedete, ce ne sono di partite da giocare...

Riferimenti bibliografici

[1] A. Archer *A Modern Treatment of the 15 Puzzle*, American Mathematical Monthly 106 (1999), pp. 793-799.

[2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy, *Winning Ways for your mathematical plays*, Academic Press, New York - London, 1982, vol. 2, Games in particular.

[3] E. Delucchi, G. Gaiffi, L. Pernazza; *Passatempi e giochi: alla ricerca di problemi e soluzioni.* Quaderni della Settimana Matematica **1**, Università di Pisa, Agosto 2007. http://www.dm.unipi.it/~ gaiffi/papers/giochi.pdf

[4] M.Gardner, *The Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American.* Chicago, IL: University of Chicago Press (1984), pp. 64-65, 200-201, e 206-207.

[5] W.W. Johnson, *Note on the "15" puzzle*, Amer.J.Math. 2, 1879, pp. 397-399.

[6] S. Loyd, *Mathematical puzzles of Sam Loyd: Selected and Edited by Martin Gardner*, Dover, New York, 1959, pp. 19-20.

[7] R.M Wilson, *Graph Puzzles, Homotopy, and the Alternating Group.* J. Combin. Th. Ser. B 16, 86-96, 1974.

[8] `http://en.wikipedia.org/wiki/Fifteen_puzzle`

[9] `http://www.mathpuzzle.com/loyd/`, versione in rete della Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks, and Conundrums (With Answers).

[10] `http://www.xlatangente.it/`

[11] `http://utenti.quipo.it/base5/jsgioco15/g15did.htm`, per calcolare online la "parità" di una configurazione del gioco del 15.

[12] `http://www.javaonthebrain.com/java/puzz15/`, per giocare online al gioco del 15.