

# *Gli ingranaggi*



*Usando ruote dentate, con un numero di denti compreso tra venti e quaranta, è possibile realizzare un ingranaggio che abbia rapporto 37?*

# **INDICE:**

- **GLI INGRANAGGI NELLA STORIA**
- **CHE COS'E' UN INGRANAGGIO**
  - **TIPI DI RUOTE DENTATE**
  - **RAPPORTO DI TRASMISSIONE**
- **INGRANAGGIO DELLO SCOOTER**
  - **PROBLEMI ANALIZZATI**
    - **CONCLUSIONI**

Istituti gemellati:  
I. C. G. GALILEI – BUSTO ARSIZIO (VA)  
I. C. G. MAZZINI – BUSCATE (MI)

*MATh.en.JEANS*

# La matematica degli ingranaggi

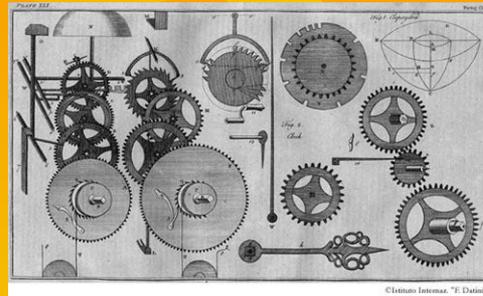


# Premessa

- ✦ Sistemi di ingranaggi destinati a moltiplicare o ridurre una velocità in entrata per ottenere una particolare velocità in uscita si trovano in numerose macchine (es. nelle auto, negli orologi, ecc.).
- ✦ Nel nostro lavoro abbiamo cercato un metodo per capire come disporre gli ingranaggi per ottenere un certo risultato.

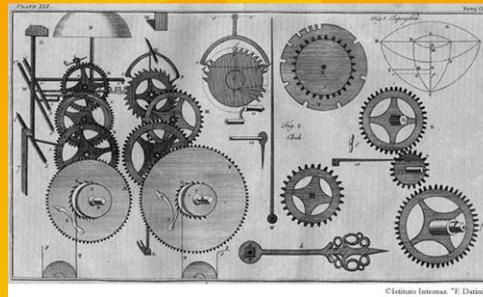
# Gli ingranaggi nella storia

Le prime macchine costruite per modificare la velocità angolare erano basate sull'attrito delle ruote. Queste ruote erano lisce e costruite con un materiale avente un elevato coefficiente di attrito. L'attrito tra le due ruote garantiva il funzionamento degli ingranaggi ottenuti con una pressione di una ruota contro l'altra. Questo sistema non permetteva però di controllare il corretto rapporto. Nacque così l'idea di mettere i denti intorno alla ruota per aumentare la precisione della trasmissione degli sforzi tra le ruote ottenendo un rapporto di trasmissione molto preciso.



# Gli ingranaggi nella storia

Le prime macchine costruite per modificare la velocità angolare erano basate sull'attrito delle ruote. Queste ruote erano lisce e costruite con un materiale avente un elevato coefficiente di attrito. L'attrito tra le due ruote garantiva il funzionamento degli ingranaggi ottenuti con una pressione di una ruota contro l'altra. Questo sistema non permetteva però di controllare il corretto rapporto. Nacque così l'idea di mettere i denti intorno alla ruota per aumentare la precisione della trasmissione degli sforzi tra le ruote ottenendo un rapporto di trasmissione molto preciso.



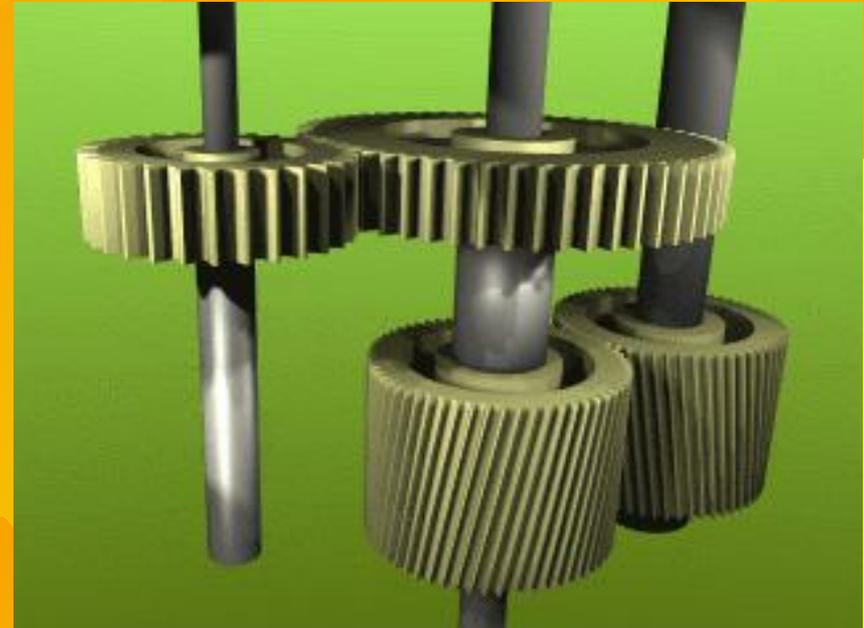


# Che cos'è un ingranaggio

- ★ L'ingranaggio è un meccanismo costituito da ruote dentate, disposte in modo da incastrarsi l'una nell'altra, con la funzione di trasmettere un movimento rotatorio dall'albero di un motore a un altro, a velocità diversa.
- ★ Perché la trasmissione del moto negli ingranaggi avvenga con continuità è necessario che i due denti di ciascuna coppia di ruote non si abbandonino prima che i due successivi siano venuti a contatto.

# Tipi di ruote dentate

- **A denti dritti** (paralleli all'asse di rotazione della ruota)
- **A denti elicoidali** (non paralleli all'asse di rotazione della ruota)



# Rapporto di trasmissione

Il rapporto di trasmissione (K) di una serie di ingranaggi è uguale al quoziente fra il numero di giri che compie l'ultima ruota dentata e il numero di giri che compie la prima.

Data 2 ruote dentate si può osservare che:

$$n_{d1} \times n_{g1} = n_{d2} \times n_{g2}$$

Si deduce che

$$K = \frac{n_{g2}}{n_{g1}} = \frac{n_{d1}}{n_{d2}}$$

(essendo  $n_{g1}$  = n° giri ruota 1;  $n_{d1}$  = n° denti ruota 1;  $n_{g2}$  = n° giri ruota 2;  $n_{d2}$  = n° denti ruota 2)

Data una coppia di ingranaggi, il rapporto dei giri è inversamente proporzionale al rapporto fra i numeri dei rispettivi denti.

Il rapporto di trasmissione, a seconda di come altera i parametri, si definisce:

a. **Riducente**: il rapporto è maggiore di 1

b. **Imparziale**: il rapporto è uguale a 1

c. **Moltiplicante**: il rapporto è compreso tra 0 e 1

Ad esempio, se consideriamo una ruota con 40 denti che ingrana su una di 20 denti, avremo un rapporto:  $40/20 = 2$ .

Se consideriamo invece una ruota con 20 denti che ingrana su una di 40 denti, avremo un rapporto:  $20/40 = 1/2$ .

# Rapporto con più ingranaggi

Un sistema per migliorare l'efficienza di una macchina è quello di aggiungere ruote dentate.

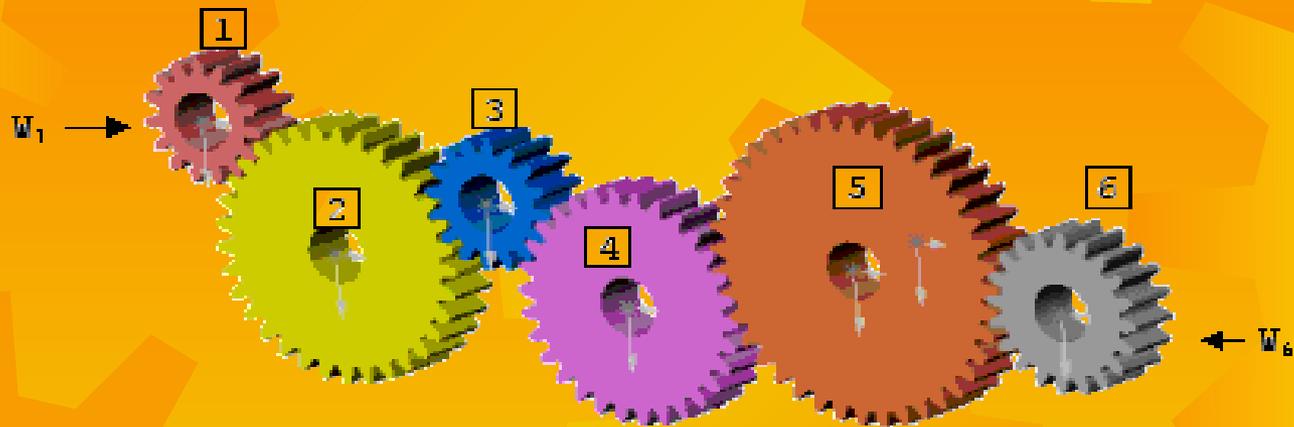


in questo caso:

$$K = \frac{nd1}{nd2} \times \frac{nd2}{nd3} = \frac{nd1}{nd3}$$

La seconda ruota non influisce sulle altre due. Però influisce sul verso di rotazione: se la prima ruota in senso orario, la seconda ruota in senso antiorario e così la terza gira in senso opposto alla seconda, cioè orario, quindi uguale alla prima.

- ☀ Si può facilmente verificare che le ruote intermedie non hanno alcuna influenza sul rapporto di trasmissione di un ingranaggio. Il rapporto dipende solo dal numero di denti della prima e dell'ultima ruota.



# Ingranaggi con alberi di trasmissione

Gli alberi sono piccoli cilindri che collegano due ruote dentate, trasmettendo il movimento in un senso a entrambe.

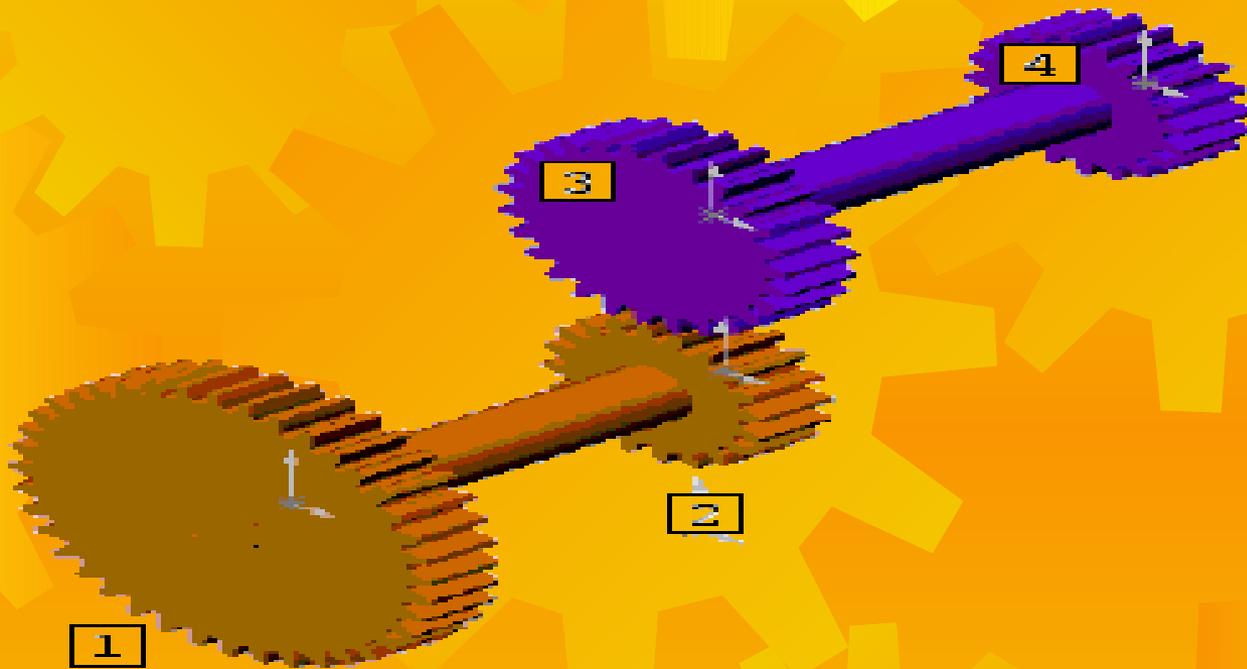
Due ruote dentate, collegate da un albero, fanno lo stesso numero di giri qualunque sia la loro dimensione.

**ALBERO = COLLEGAMENTO.**



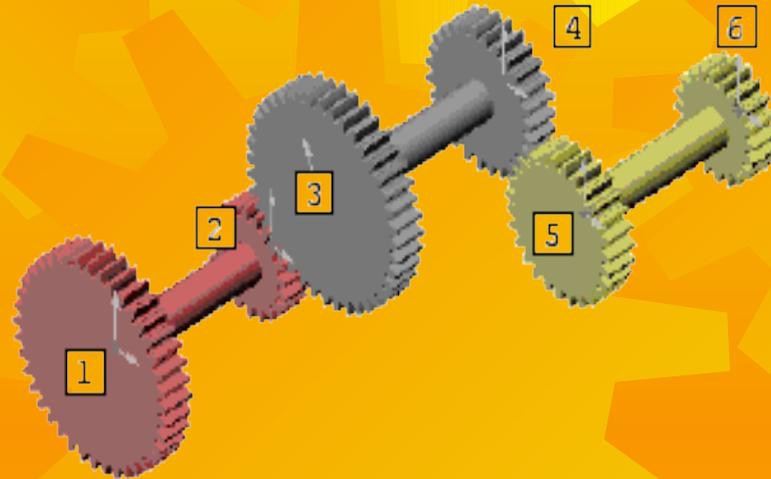
$$nd2 \neq nd1 \quad \text{ma} \quad ng1 = ng2$$

# Ingranaggi con più ruote ed alberi



Si può verificare che il rapporto di trasmissione di questo ingranaggio dipende dal rapporto delle ruote che si toccano direttamente (2 e 3).

Se montiamo più ruote e alberi si può notare che:



$$K = \frac{nd2}{nd3} \times \frac{nd4}{nd5}$$

Quindi, in generale, il rapporto totale di una macchina di questo tipo è uguale al prodotto dei rapporti delle ruote che si toccano.

Se vogliamo ottenere rapporti particolari o complessi sarà necessario scomporli in rapporti più semplici da realizzare.

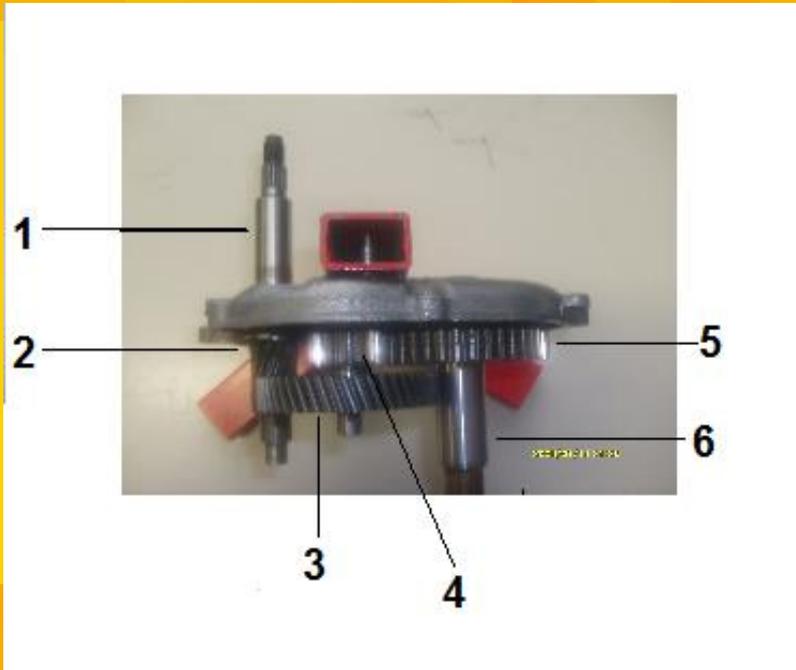
# Ingranaggio dello scooter



È composto da:

- 4 ruote dentate (due elicoidali e due semplici)
- sostegno
- parte metallica

# Struttura



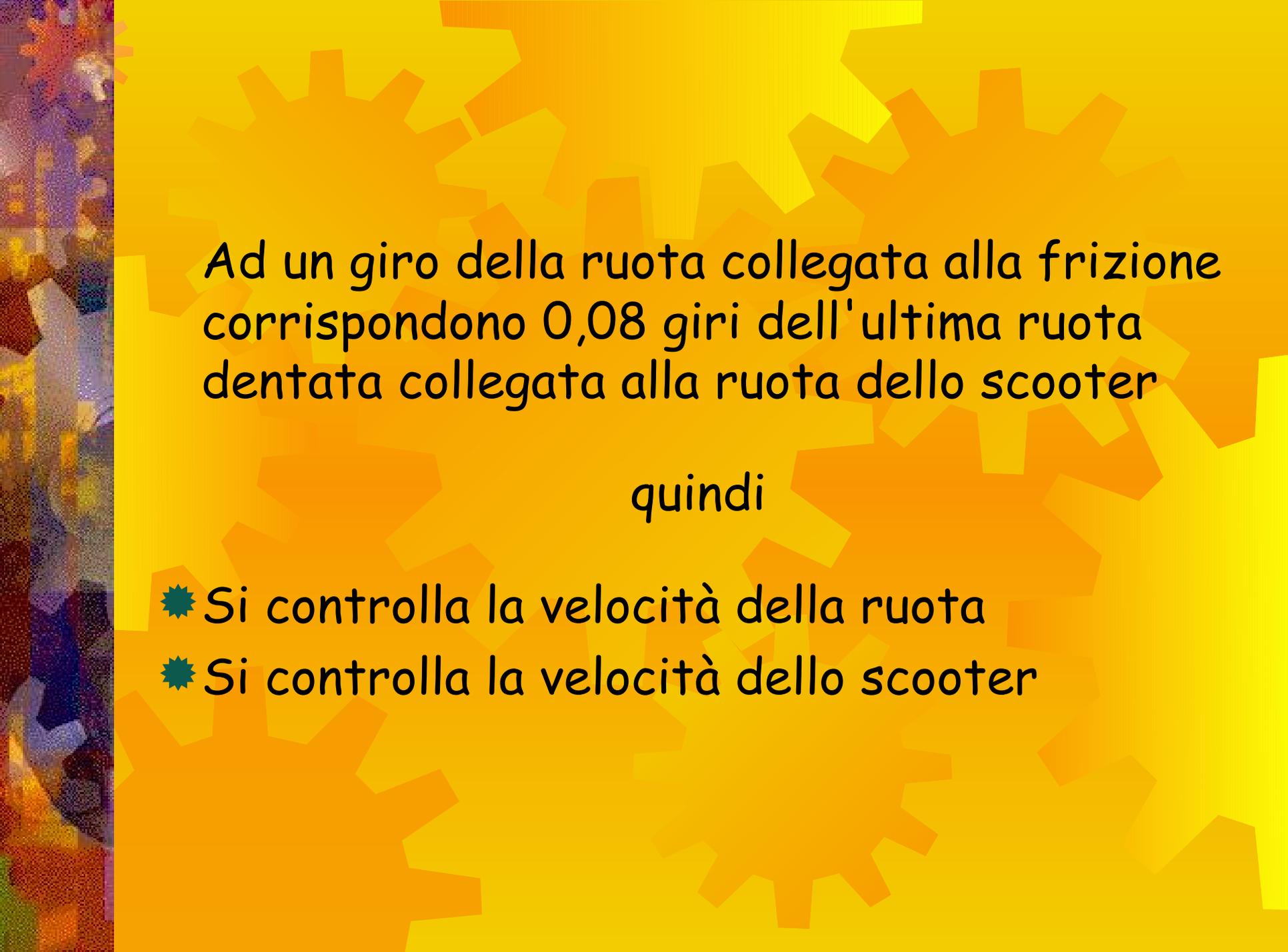
- 1. albero collegato alla frizione
- 2. ruota n.1
- 3. ruota n.2
- 4. ruota n.3
- 5. ruota n.4
- 6. albero collegato alla ruota

Abbiamo contato i denti di ciascuna ruota per determinare il rapporto di ingranaggio

- ☀ 1° ruota: 13 denti
- ☀ 2° ruota: 52 denti
- ☀ 3° ruota: 14 denti
- ☀ 4° ruota: 43 denti

**Rapporto:**

$$13/52 \times 14/43 = 7/86 = 0,08$$



Ad un giro della ruota collegata alla frizione  
corrispondono 0,08 giri dell'ultima ruota  
dentata collegata alla ruota dello scooter

quindi

- Si controlla la velocità della ruota
- Si controlla la velocità dello scooter

# PROBLEMI ANALIZZATI

Abbiamo analizzato rapporti tra ingranaggi con numero di denti compresi tra il 20 e il 40 e abbiamo provato a rispondere ai quesiti di seguito riportati.

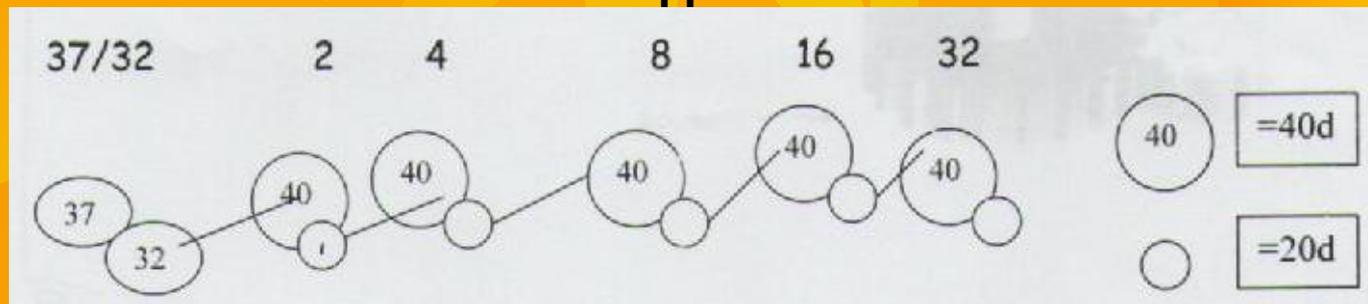
Successivamente abbiamo esteso lo studio ad ingranaggi con numero di denti compreso nell'intervallo  $[30, 50]$ .

**Si riesce a ottenere una macchina avente rapporto 37 con ruote aventi numero di denti compreso tra il 20 e il 40?**

Abbiamo capito che si possono realizzare macchine con rapporto 37 perché abbiamo visto che 2 è il rapporto massimo che si può ottenere con ingranaggi composti da ruote con numero di denti compresi tra il 20 e il 40 ( $40/20=2$ )

Quindi abbiamo immaginato una macchina con rapporto  $37/32$  (perché 32 è l'unica potenza del 2 compresa tra il 20 e il 40) e poi l'abbiamo collegata con una macchina con rapporto 32 ( $40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$ ).

Abbiamo calcolato il rapporto tra gli ingranaggi di questa macchina moltiplicando il rapporto della 1<sup>a</sup> macchina per il rapporto della 2<sup>a</sup> macchina e abbiamo ottenuto rapporto 37.



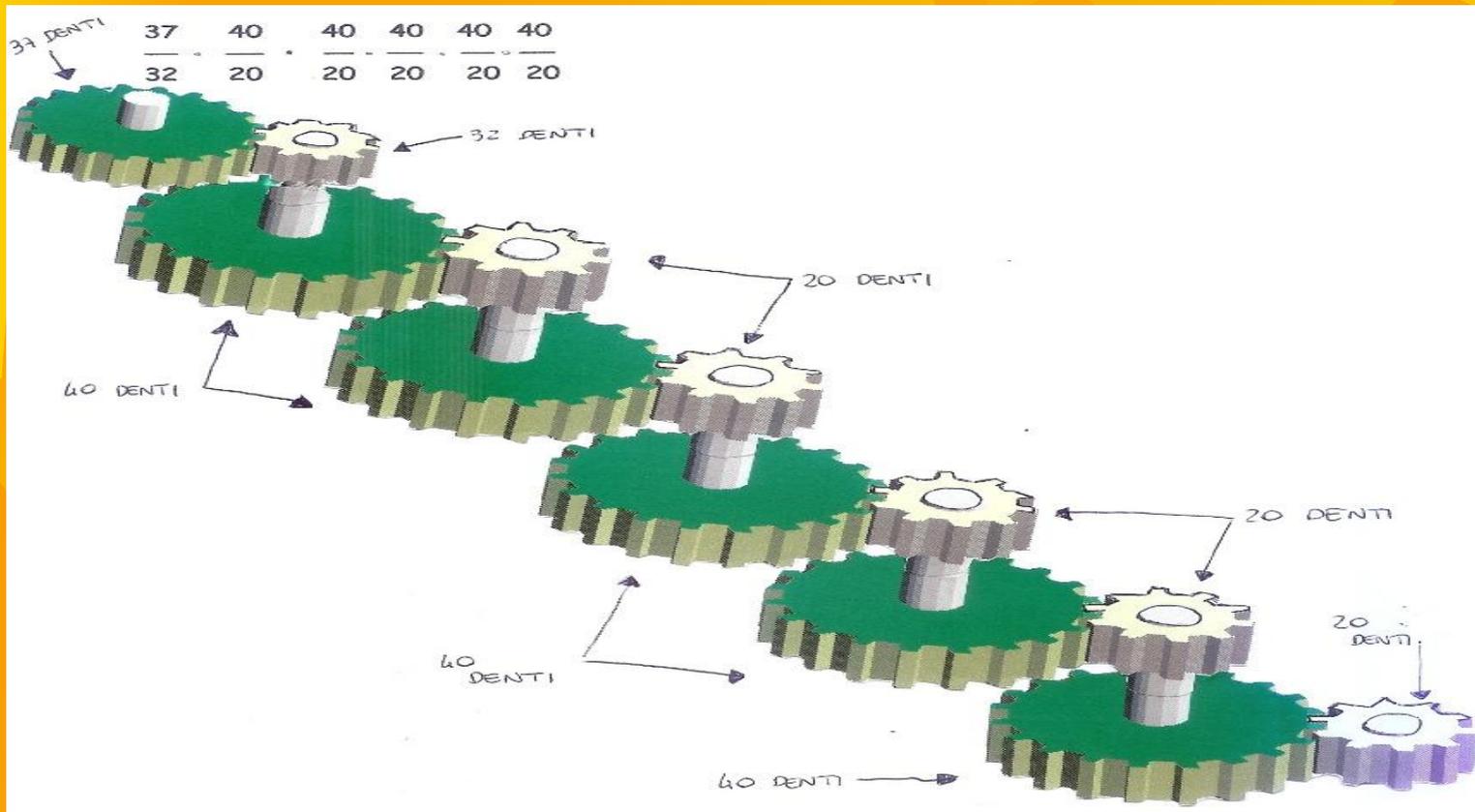
$$37/32 \times 32/1 = 37 \text{ rapporto}$$

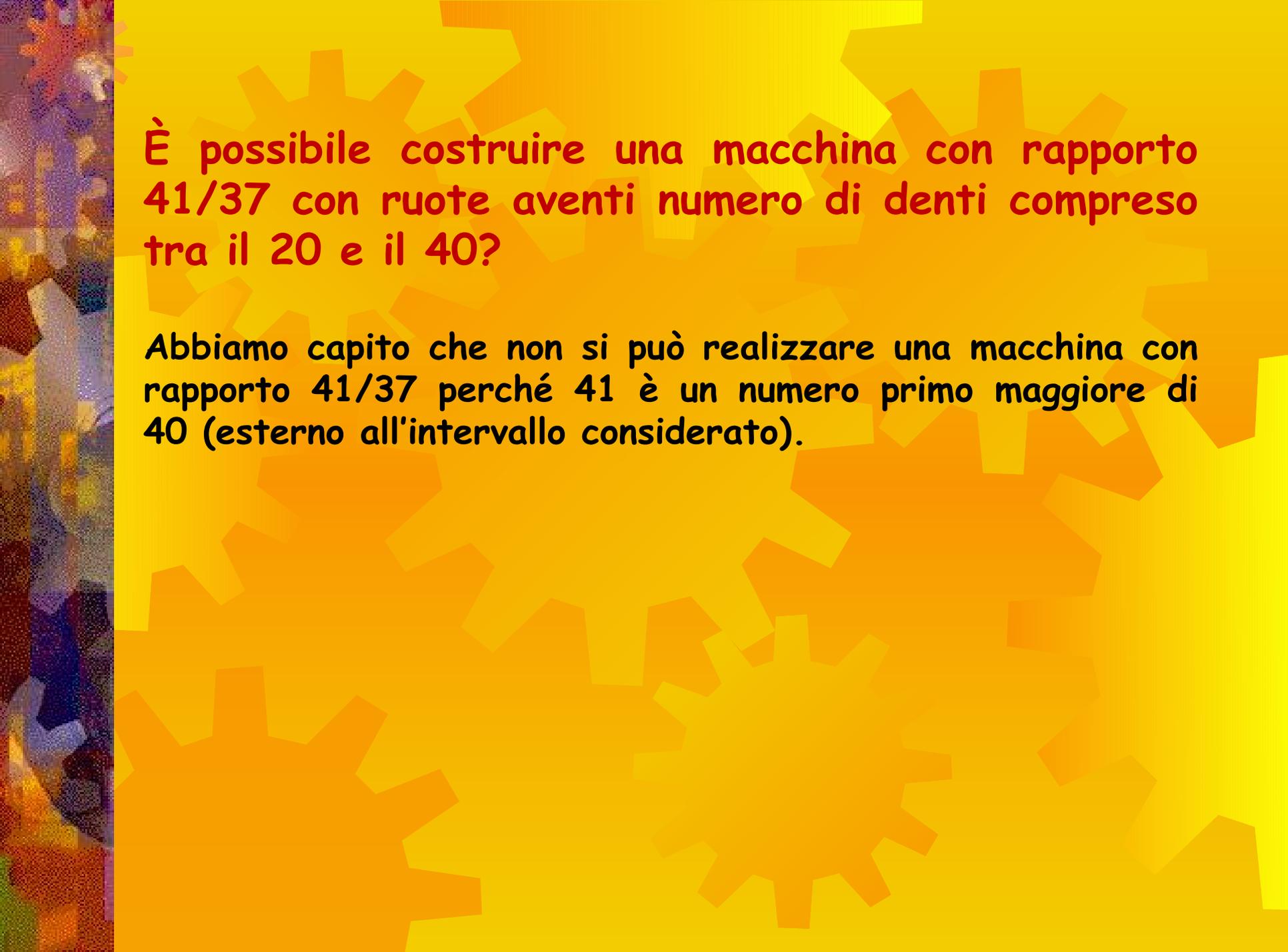
# FORMULA GENERALE

$$n_{d1}/n_{d2} \times (n_{d3}/n_{d4})^*$$

dove la potenza \* è pari al numero di rapporti

12 è il numero minimo di ingranaggi (cioè 6 rapporti) utilizzabili per costruire una macchina con rapporto 37 fra gli ingranaggi, perché utilizza il massimo rapporto e produce quindi la massima efficienza.





È possibile costruire una macchina con rapporto  $41/37$  con ruote aventi numero di denti compreso tra il 20 e il 40?

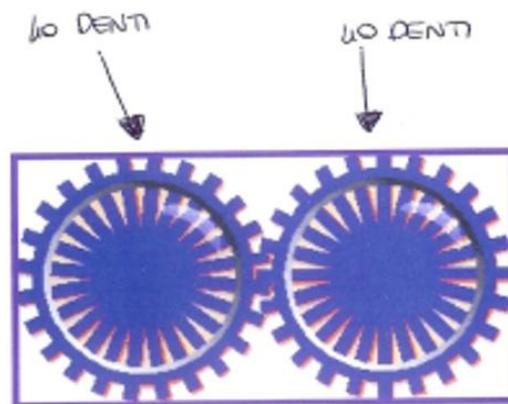
Abbiamo capito che non si può realizzare una macchina con rapporto  $41/37$  perché 41 è un numero primo maggiore di 40 (esterno all'intervallo considerato).

Quali rapporti si possono ottenere con ruote aventi n° denti compresi tra 20 e 40?

Ecco alcuni rapporti ottenuti espressi sia da numeri interi che razionali.

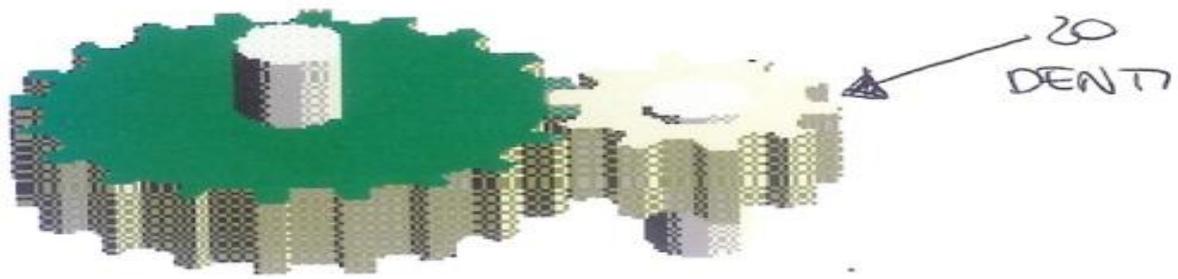
a) Rapporti espressi da numeri interi:

$$1 = \frac{40}{40}$$



$$2 = \frac{40}{20}$$

40  
DENTI



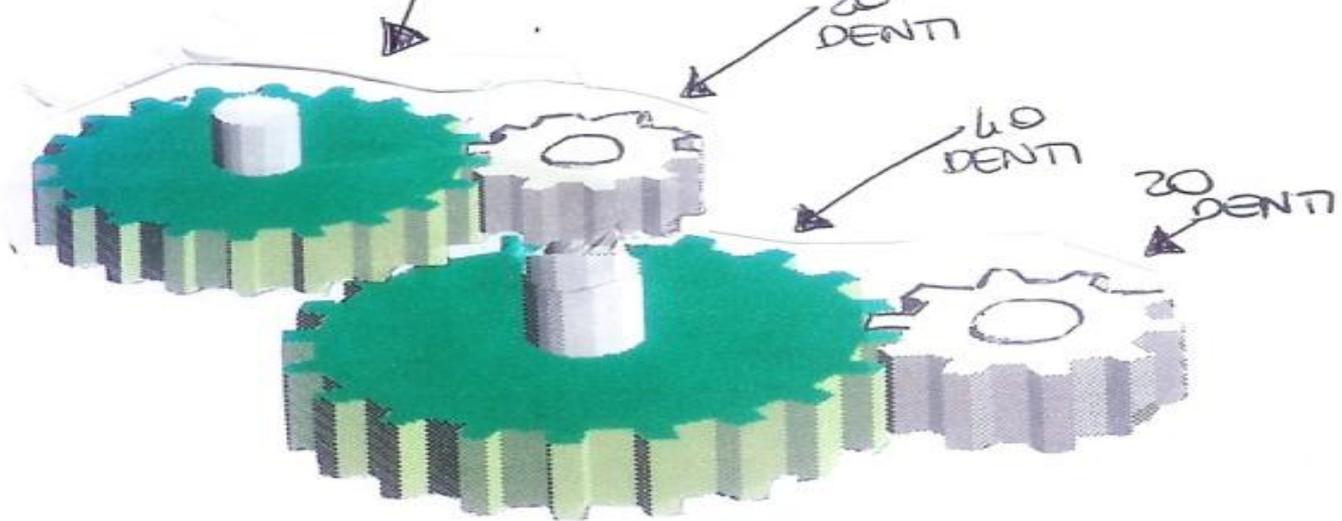
$$3 = \frac{30}{20} \cdot \frac{40}{20}$$

30 DENTI

20 DENTI

40 DENTI

20 DENTI





4 =  $40/20 \times 40/20$   
5 =  $25/20 \times 40/20 \times 40/20$   
6 =  $30/20 \times 40/20 \times 40/20$   
7 =  $35/40 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
8 =  $40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
9 =  $30/20 \times 40/20 \times 30/20 \times 40/20$   
10 =  $25/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
11 =  $33/24 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
12 =  $30/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
13 =  $39/24 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
14 =  $35/40 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
15 =  $30/20 \times 40/20 \times 25/20 \times 40/20 \times 40/20$   
16 =  $40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
17 =  $34/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
18 =  $30/20 \times 40/20 \times 30/20 \times 40/20 \times 40/20$   
19 =  $38/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
20 =  $25/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$

- 
- 21 =  $35/40 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 30/20 \times 40/20$   
22 =  $22/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
23 =  $23/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
24 =  $30/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
25 =  $25/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 25/20 \times 40/20 \times 40/20$   
26 =  $39/24 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 39/24 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
27 =  $30/20 \times 40/20 \times 30/20 \times 40/20 \times 30/20 \times 40/20$   
28 =  $35/40 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
29 =  $29/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
30 =  $30/20 \times 40/20 \times 25/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
31 =  $31/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
32 =  $40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
33 =  $33/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
34 =  $34/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
35 =  $35/40 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 25/20 \times 40/20 \times 40/20$   
36 =  $30/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 30/20 \times 40/20 \times 40/20$   
37 =  $37/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
38 =  $38/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
39 =  $39/32 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$   
40 =  $25/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20 \times 40/20$

**b) Rapporti espressi da numeri razionali:**

$$1/2 = 20/40$$

$$1/3 = 20/30 \times 20/40$$

$$1/4 = 20/40 \times 20/40$$

$$1/5 = 20/25 \times 20/40 \times 20/40$$

$$1/6 = 20/30 \times 20/40 \times 20/40$$

$$2/3 = 20/30$$

$$3/2 = 20/40 \times 30/20 \times 40/20$$

$$5/2 = 20/40 \times 25/20 \times 40/20 \times 40/20$$

$$4/3 = 20/30 \times 20/40 \times 40/20 \times 40/20$$

Consideriamo un rapporto realizzabile, qual è il numero minimo di ruote dentate necessarie per realizzare una macchina (o ingranaggio) che abbia tale rapporto?

Il numero minimo di ingranaggi per macchina si deduce dall'esponente della potenza del rapporto massimo compresa nell'intervallo, in questo caso dalla potenza del 2.

(n° massimo denti/n° minimo denti = rapporto massimo).

$$2 = 40/20$$

$$2^2 = 4 = 40/20 \times 40/20 = (40/20)^2$$

$$2^3 = 8 = (40/20)^3$$

$$2^4 = 16 = (40/20)^4$$

$$2^5 = 32 = (40/20)^5$$

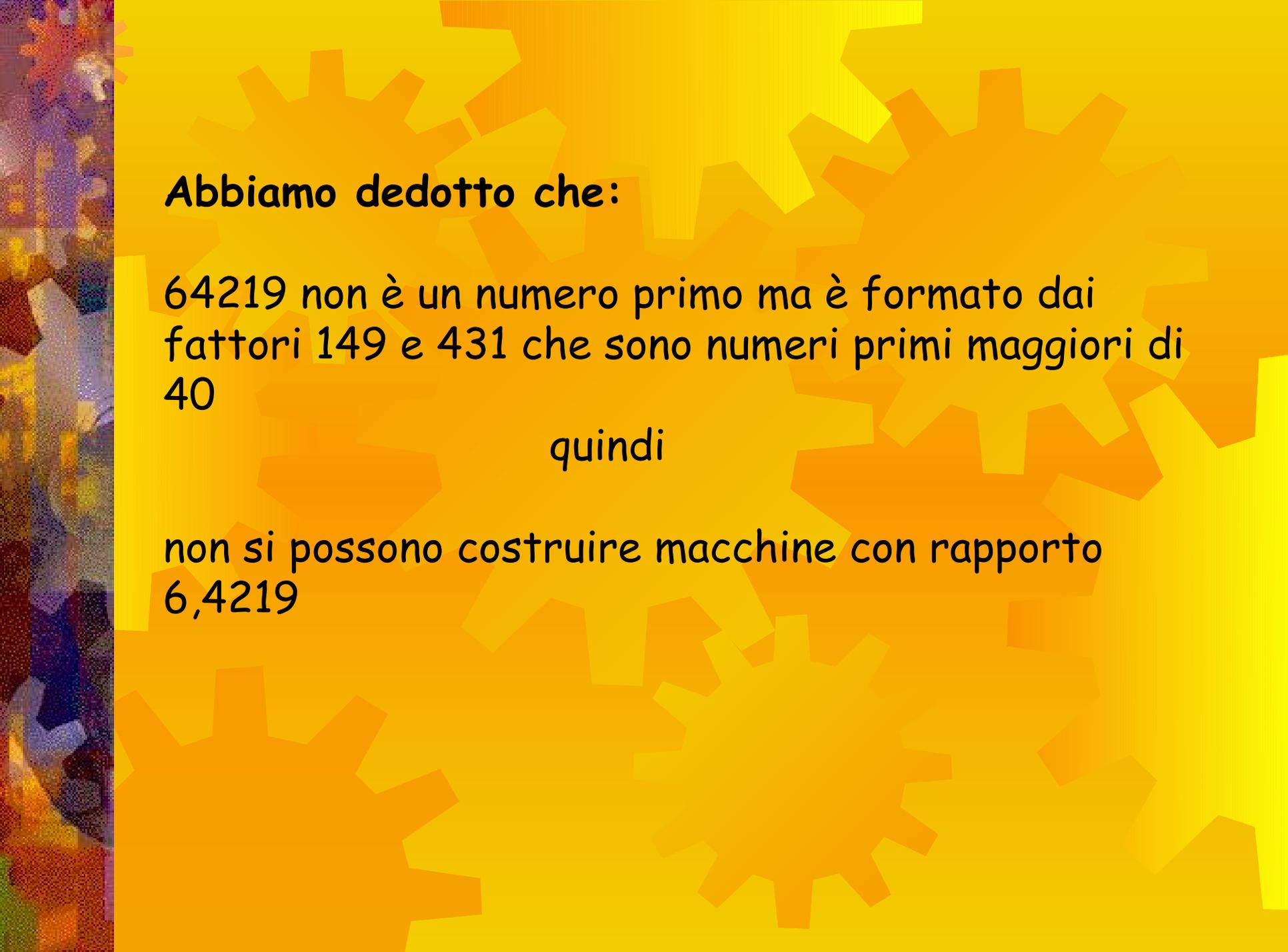
Es. Rapporto 37      6 (= 1+5) ingranaggi  $37/32 \times 2^5$

Si può costruire una macchina con rapporto 6,4219 utilizzando ruote con numero di denti compreso tra 20 e 40?

✱ Avendo a che fare con un rapporto, abbiamo messo il numero in questione sotto forma di frazione:  
 $64219/10000$

✱ Abbiamo tradotto il problema nella seguente domanda:

**64219 è un numero primo o no?**



**Abbiamo dedotto che:**

64219 non è un numero primo ma è formato dai fattori 149 e 431 che sono numeri primi maggiori di 40

quindi

non si possono costruire macchine con rapporto 6,4219

# Conclusioni intervallo [20,40]

Si possono ottenere come rapporto tutti i numeri interi minori o uguali a 40.

Si possono realizzare macchine con rapporti maggiori di 40 solo se non sono numeri primi e se nella loro scomposizione in fattori primi non compaiono numeri primi maggiori di 40.

86 = no perché

$$\begin{array}{r|l} 86 & 2 \\ 43 & 43 \\ 1 & \end{array}$$

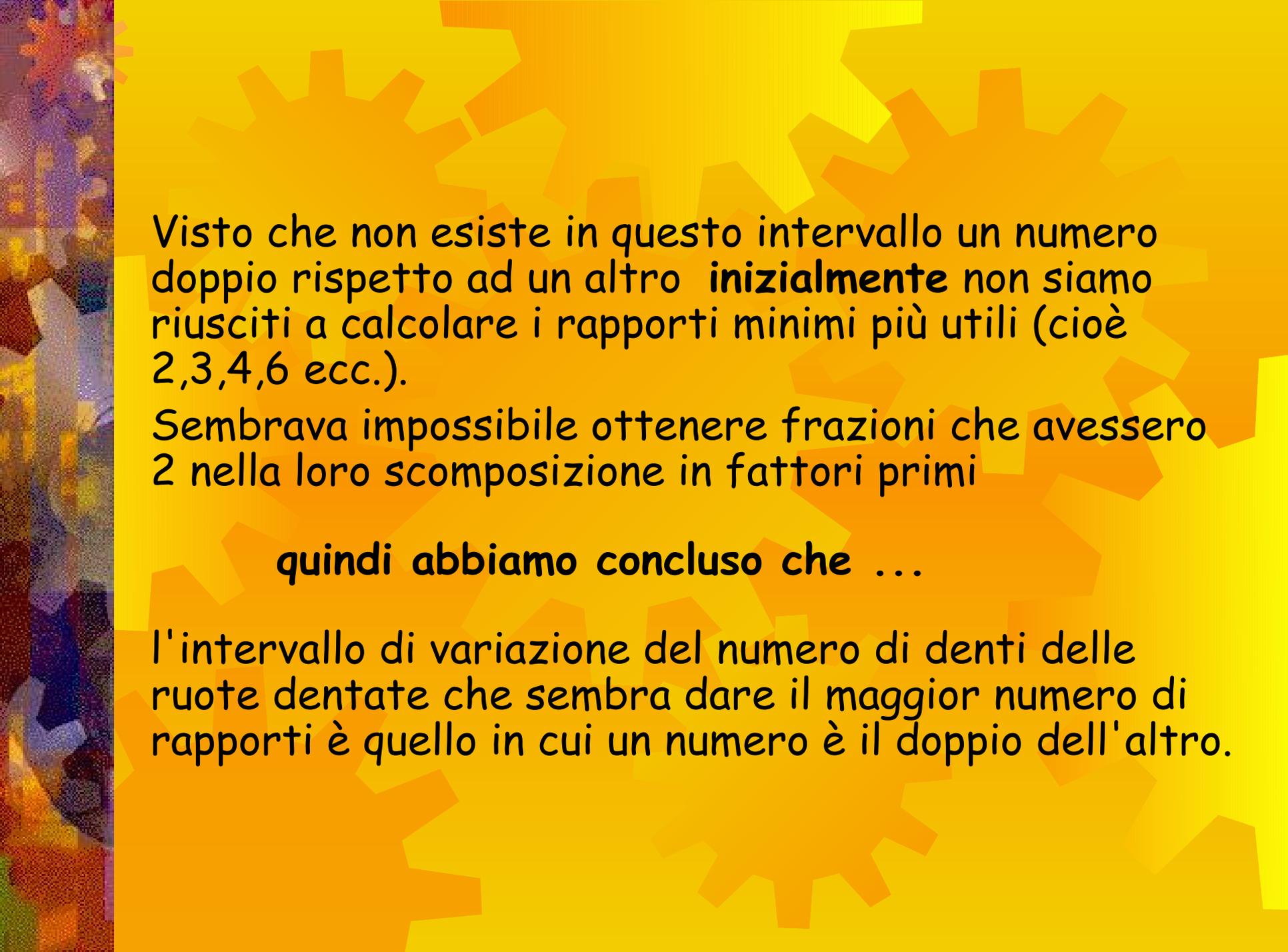
$$86 = 2 \times 43$$

43 = n° primo

Si possono ottenere come rapporto numeri razionali tali che la frazione ridotta ai minimi termini abbia numeratore e denominatore scomponibili in fattori primi minori di 40.

## Quali rapporti si possono realizzare con intervallo 50/30?

Abbiamo subito notato che la situazione è più complessa rispetto al caso dell'intervallo 20/40, perché il rapporto massimo 50/30 non è un numero intero (corrisponde a 1,6 periodico) e l'unico numero intero che si riesce ad ottenere come rapporto è 1 che non produce effetti di moltiplicazione.



Visto che non esiste in questo intervallo un numero doppio rispetto ad un altro **inizialmente** non siamo riusciti a calcolare i rapporti minimi più utili (cioè 2,3,4,6 ecc.).

Sembrava impossibile ottenere frazioni che avessero 2 nella loro scomposizione in fattori primi

**quindi abbiamo concluso che ...**

l'intervallo di variazione del numero di denti delle ruote dentate che sembra dare il maggior numero di rapporti è quello in cui un numero è il doppio dell'altro.

...ma

in seguito siamo riusciti ad ottenere rapporti espressi da numeri primi non molto elevati come 2, 3, 5 anche con un intervallo di numeri di denti che varia tra 30 e 50:

☀  $2 = 50/30 \times 42/35$  oppure  $45/30 \times 40/30$

☀  $3 = 50/30 \times 42/35 \times 45/30$

oppure  $45/30 \times 40/30 \times 45/30$

☀  $5 = 50/30 \times 42/35 \times 45/30 \times 50/30$

**Attraverso questi prodotti, abbiamo trovato i seguenti rapporti:**

•  $4 = 50/30 \times 42/35 \times 50/30 \times 42/35$

•  $10 = 42/30 \times 50/30 \times 50/35 \times 42/30 \times 50/30 \times 45/35$

•  $15 = 42/30 \times 50/30 \times 42/30 \times 50/30 \times 50/35 \times 45/30 \times 45/35$

•  $20 = 42/30 \times 50/30 \times 42/30 \times 50/30 \times 50/35 \times 45/35 \times 42/35 \times 50/30$

•  $25 = 42/30 \times 50/30 \times 42/30 \times 50/35 \times 45/30 \times 45/35 \times 50/30$

•  $30 = 42/30 \times 50/30 \times 42/30 \times 50/35 \times 45/35 \times 50/30 \times 45/30 \times 50/30 \times 42/35$

**Abbiamo trovato anche il rapporto 37**

$37 = 42/30 \times 50/30 \times 42/30 \times 50/35 \times 45/35 \times 50/30 \times 45/30 \times 50/30 \times 42/35 \times 37/30$

## Conclusioni intervallo [30,50]

- ✿ Per trovare i numeri primi bisogna sicuramente partire copiando i primi rapporti che hanno determinato il numero primo precedente.
- ✿ Questa regola si è dimostrata valida solo per i numeri che hanno un loro doppio entro il limite massimo. Non siamo per questo riusciti a trovare il rapporto 29 (è l'unico numero compreso tra il minimo e la metà del massimo)
- ✿ Questa regola si rivela valida per tutti gli intervalli di ruote dentate, in cui un limite massimo non sia il doppio del minimo.

**ISTITUTO COMPRENSIVO  
"GALILEI" BUSTO ARSIZIO**

**Alunni**

**Borriero Federico  
Caccia Marco  
Calamusa Chiara  
Calamusa Federico  
Candiani Sofia  
Cataldi Silvia  
Cavalera Eleonora  
Cinotti Filippo  
Chiaravalli Filippo  
Crespi Andrea  
Dotolo Andrea  
Giugnoli Claudio  
Landonio Marco  
Mauri Beatrice  
Paparazzo Matteo  
Pargoletti Benedetta  
Paris Francesca  
Perrotta Andrea  
Rigon Bruno  
Rota Denis  
Testa Federica  
Troiani Alexandra  
Troiani Serena  
Troiani Virginia  
Verdicchio Moreno**

**Docenti**

**Maria Ausilia Sora  
Zanzottera Alessandra**

**ISTITUTO COMPRENSIVO  
"MAZZINI" BUSCATE**

**Alunni**

**Abdul Kanwal  
Aguari Misha  
Arbia Stella  
Berra Matteo  
Cesco Veronica  
Clemente Giancarlo  
Corazza Michele  
Fusco Andrea  
Ghirimoldi Hobie  
Gianella Davide  
Gianella Matteo  
Harmal Ibtissam  
Khan Wassiullah  
Lauricella Francesca  
Naggi Luca  
Paganini Marzia  
Piasoni Andrea  
Purgato Elena  
Rappo Gianluca  
Sbrò Gabriele  
Viceconti Davide  
Zanetti Matteo**

**Docenti**

**Perotta M. Luisa  
Zoia Sabrina**