Le lumache nella scatola

Un certo numero di lumache si trova dentro una scatola; per un motivo che non sto qui a precisare, queste lumache hanno litigato e ora vogliono stare il più lontano possibile tra loro (ma NON possono uscire dalla scatola). Dove si posizionano le lumache all'interno della scatola?

Scuola Media "Tabacchi", I.C. "Thouar-Gonzaga" – Milano
Classe: II D
Insegnante di riferimento: Prof.ssa Giovanna Santolini
Ricercatore: dott. Claudio Vallati
Partecipanti: Massimiliano Basilone, Oussama El Mir, Riccardo Ferrari, Jenny Gatmaitan, Layru Hetti, Alessandro Iacobone, Paolo Mura, Lorenzo Palmer, Valeria Paredes, Leonard Riediger, Leo Soncini, Andrea Zanrosso, Francesca Zedda

MATh.en.JEANS

LE LUMACHE NELLA SCATOLA

Classi: 1B Colorni - 2D Tabacchi

(Milano)

Presentazione del problema
da parte di Claudio

LE LUMACHE NELLA SCATOLA

In un giorno di pioggia Giuliano ha catturato delle lumache e le ha messe in una scatola.

"Stavano tutte vicine e poi, lente come sono, è stato proprio facile catturarle!" racconta Giuliano.

Intanto nella scatola le lumache hanno iniziato a discutere tra di loro, dandosi l'un l'altra la colpa per essere state catturate.

Un battibecco dopo l'altro e... le lumache finiscono per litigare sul serio: "non ti voglio più vedere!" dice la prima e ben presto anche le altre sono della stessa opinione... ma queste lumache sono tutte nella stessa scatola!

Dopo un po' di tentativi riescono a prender posizione in modo tale da stare tutte **"il più lontano possibile"** l'una dall'altra. Ma cosa vorrà dire **"il più lontano possibile"**?

Di certo le lumache si sono disposte in modo tale che la distanza tra di loro sia la maggiore possibile e che, scelte due qualsiasi lumache del gruppo, tra di esse ci sia sempre la stessa distanza.

- se la scatola fosse un **cubo**...
  - ... e le lumache fossero 2, dove si posizionerebbero?
  - ... e le lumache fossero 3, dove si posizionerebbero?
  - ... e le lumache fossero 4, dove si posizionerebbero?
  - ... e le lumache fossero 5 ...
- se la scatola fosse un **parallelepipedo con le tre dimensioni differenti (cioè una normale scatola da scarpe)**...
  - ... e le lumache fossero 2, dove si posizionerebbero?
  - ... e le lumache fossero 3, dove si posizionerebbero?
  - ... e le lumache fossero 4, dove si posizionerebbero?
  - ... e le lumache fossero 5 ...
- se la scatola fosse...

Come abbiamo affrontato il problema

Abbiamo considerato la presenza di un certo numero di lumache in una scatola, iniziando da 2 per passare a 3 e poi a 4.

Queste, dopo un po' di tentativi, prendono posizione in modo tale da stare tutte il più lontano possibile l'una dall'altra.

Il nostro problema è stato quello di decidere la posizione della lumache nella scatola facendo in modo che la distanza tra di loro sia la maggiore possibile e che sia la medesima per tutte.

Le lumache si muovono all'interno della scatola, <u>ma non possono volare</u>, strisciano solamente ed allora la distanza si calcola misurando il percorso che effettivamente compiono (considerando il percorso più breve).

Fissiamo alcuni punti…

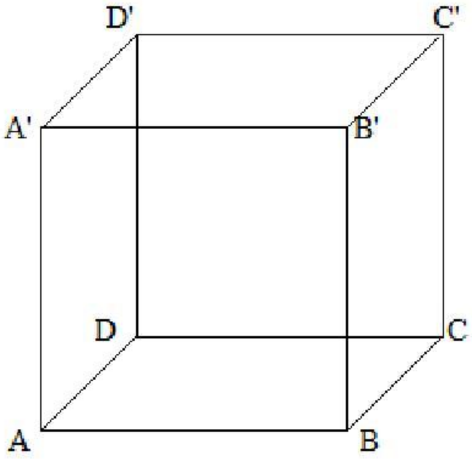
La nostra classe ha deciso di affrontare questo problema utilizzando una scatola cubica.

Abbiamo costruito un cubo con il **"geomag"** ma poi è caduto ed allora abbiamo compreso che potevamo "aprire il cubo", cioè svilupparlo nel piano.

Abbiamo deciso di costruire dei cubi che si potessero aprire e chiudere a nostro piacere.

Abbiamo capito che la misura dello spigolo non è importante ai fini di stabilire la posizione, ma per confrontare le misure ne abbiamo fissato una.

Per comunicare in maniera più chiara possibile abbiamo deciso di utilizzare sempre le stesse lettere per indicare i vertici: quelli della faccia inferiore con le lettere A, B, C, D e quelli corrispondenti della faccia superiore con A', B', C', D'.

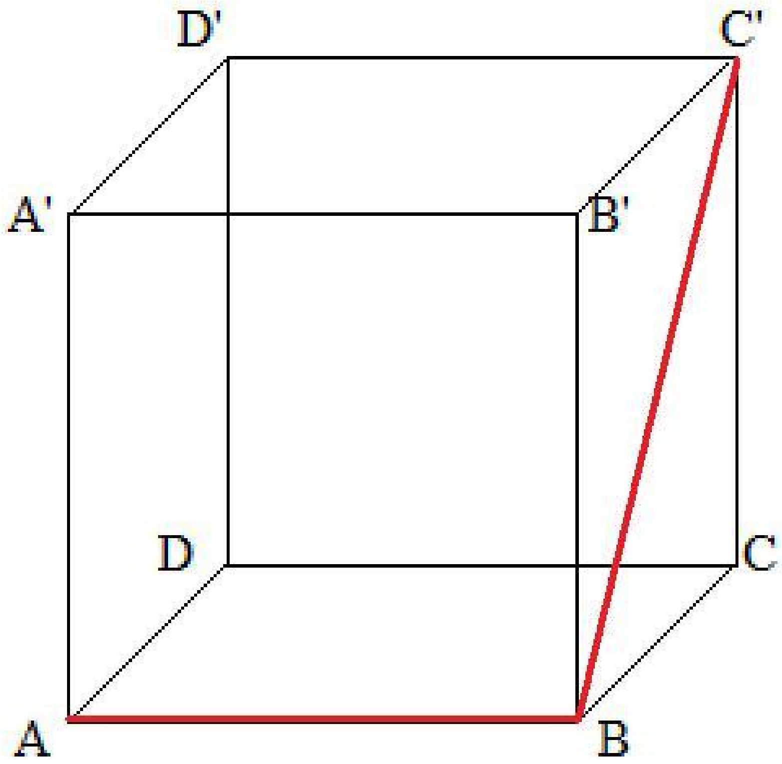


Problema con due lumache

Abbiamo collocato una lumaca sul vertice A e l'altra sul vertice opposto C' .

La distanza tra le 2 lumache è stata calcolata pari alla somma della misura del lato con la misura della diagonale di una faccia

D = AB + BC '= l + d



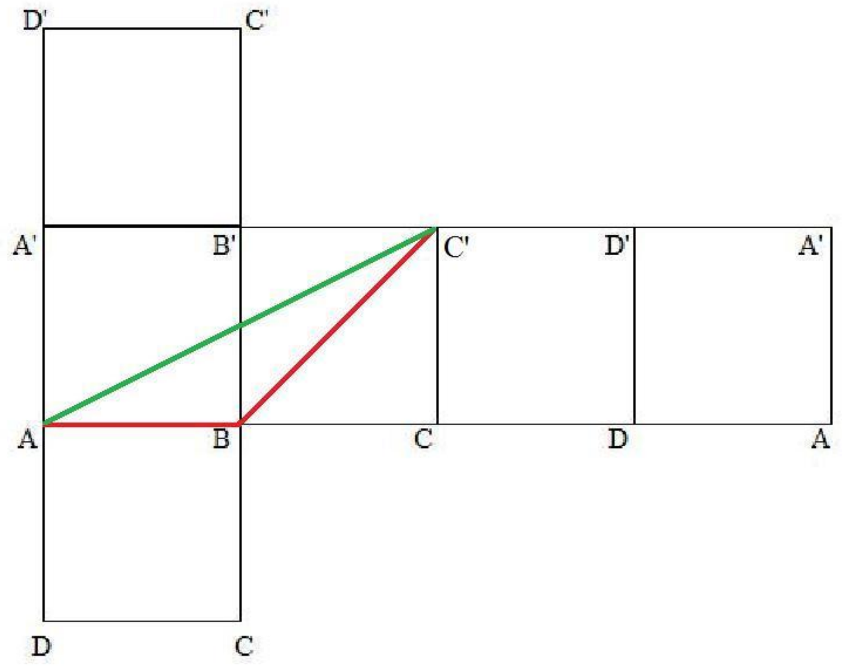
Però...

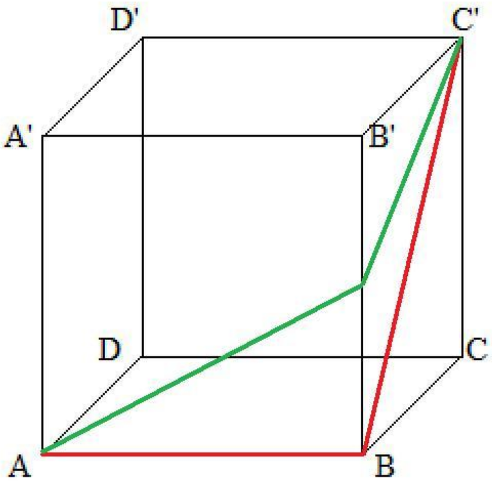
Però... poi

Un nostro compagno ha osservato che aprendo il cubo si poteva vedere che esisteva una linea più breve che unisce A con C' , ossia il segmento AC' (disegnato in verde).

Infatti osservando il triangolo ABC' si sa che un lato è sempre minore della somma degli altri due.

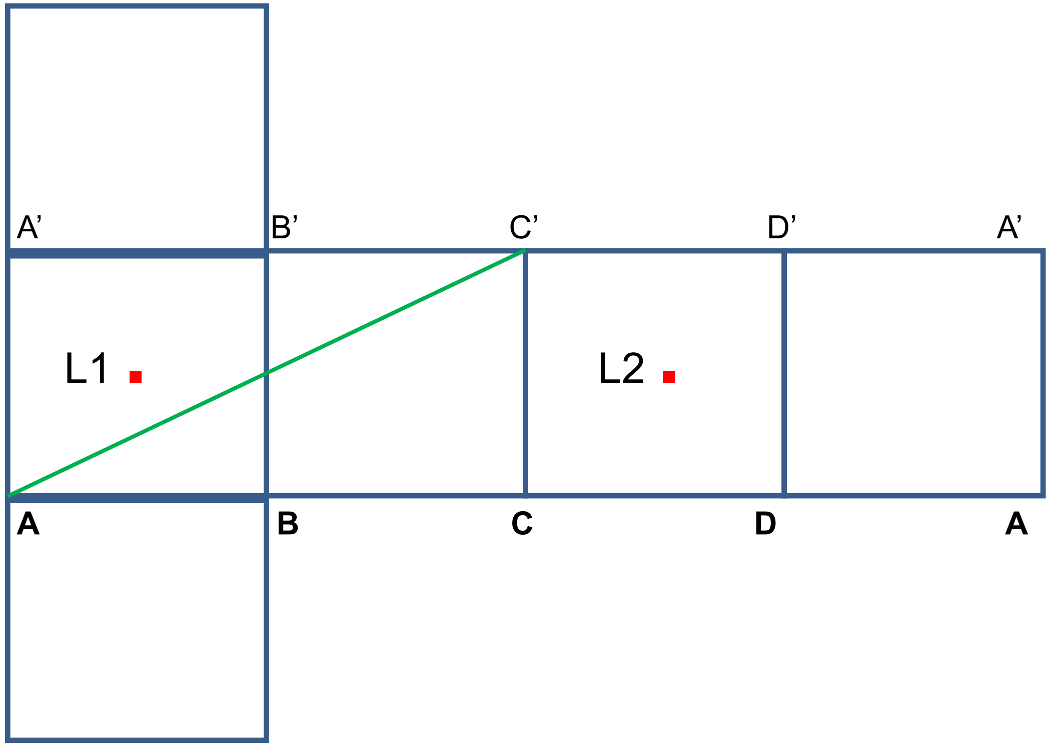
Se si guarda il cubo la distanza più breve è data dalla somma dei segmenti AM ed MC', in cui M è il punto medio dello spigolo BB'





Obiezioni di Claudio

Carissimi alunni della 2^D, ho guardato il disegno e la soluzione per la scatola cubica e le due lumache…
Aprire il cubo in uno sviluppo per misurare la distanza più breve mi sembra un'ottima idea!
Posso dire che la vostra soluzione MI PIACE, ma ora vorrei farvi una domanda:
guarda il disegno che ti faccio e dove metto la lumaca L1 e la lumaca L2, la loro distanza è più grande o più piccola del segmento verde?
Se mi rispondete per bene, forse avete concluso il caso a due lumache…



E nostra risposta:

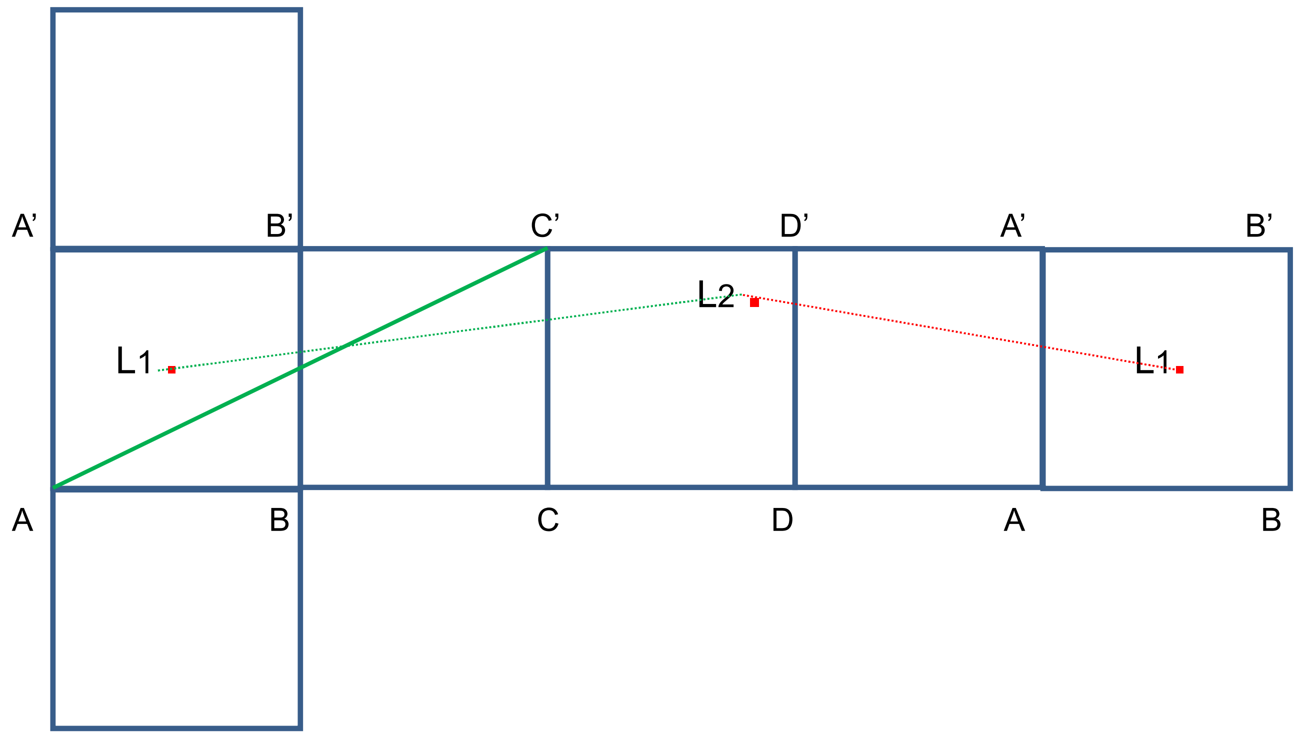
La distanza tra L1 e L2 è uguale alla somma delle lunghezze di 2 lati, ossia al segmento AC. Guardando il triangolo rettangolo ACC’ si vede che l'ipotenusa AC’ è maggiore del cateto AC. Per cui la distanza da noi individuata è la maggiore possibile

Altra domanda tranello

Claudio ci stimola con un altro *tranello*: "Cosa mi dite se sposto la lumaca L2 come nel disegno qui sotto?"

Nostra replica:

Abbiamo disegnato due volte la faccia ABA'B' e si vede che la distanza più breve tra L1 e L2 non è il segmento tratteggiato in verde, ma quello tratteggiato in rosso, che è sempre minore di AC'.

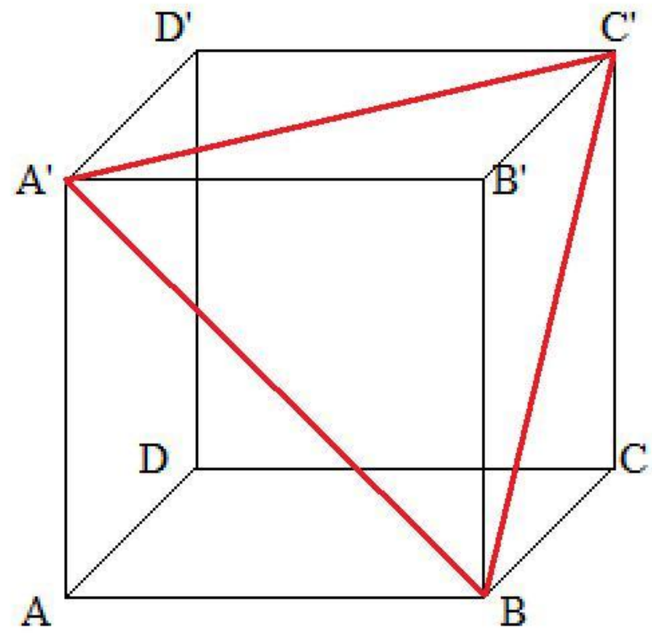


Problema con tre lumache

Il problema è risultato particolarmente impegnativo, ma ben presto abbiamo trovato quella che per noi era una soluzione del problema, posizionando le lumache ai vertici A',C',B che corrispondono ai vertici opposti.

Le distanze sono risultate tutte e tre congruenti perché sono le diagonali delle facce e quindi sono uguali.

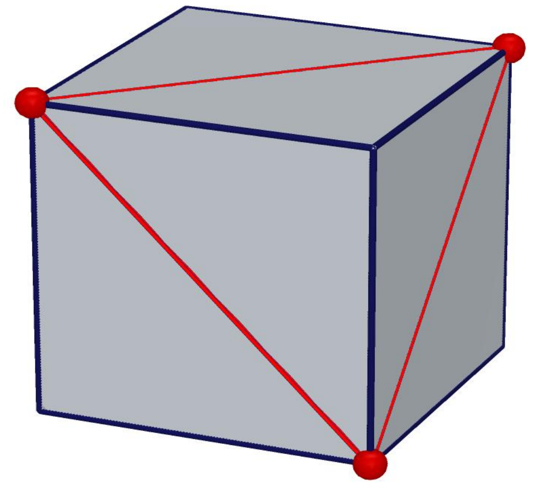
distanza = d

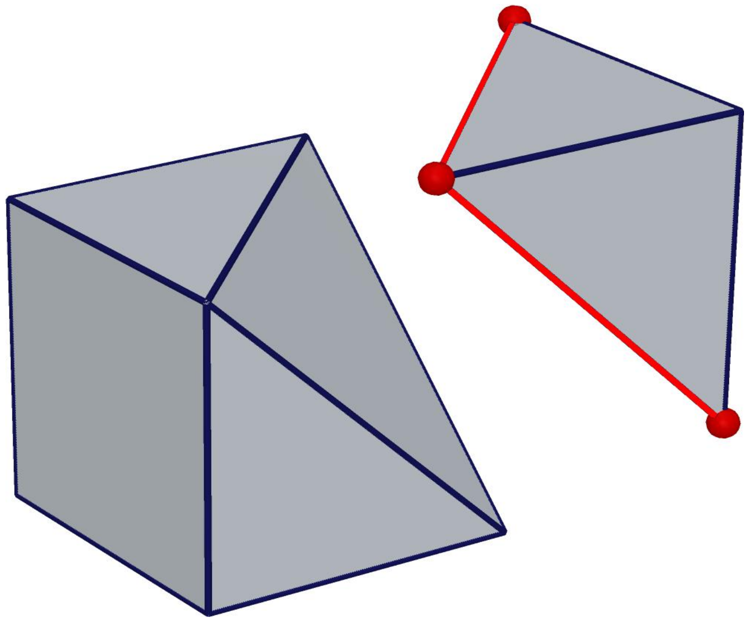


Obiezioni di Claudio

La soluzione mi piace perché le lumache così sono tutte alla stessa distanza e come dite la loro distanza è uguale alla diagonale di una faccia del cubo.
Però mi è venuto un dubbio... così ho fatto qualche disegno.
Prima ho provato a disegnare il cubo e la vostra soluzione, poi ho provato a "staccare" un pezzo di cubo, tagliandolo proprio con un piano passante per i punti dove (secondo voi) stanno le tre lumache.
Qui mi è venuto il dubbio: il pezzo che ho staccato mi sembra un po' piccolino! Cerco di spiegarmi meglio: se le lumache devono stare IL PIÙ LONTANO POSSIBILE, è un po' strano che non usino tutto lo spazio "che è avanzato" dal taglio del cubo.
È un po' difficile spiegarlo a parole, spero che con i disegni si capisca cosa intendo (provate a stampare questo messaggio e farlo leggere anche alla tua professoressa di matematica e parlatene insieme).

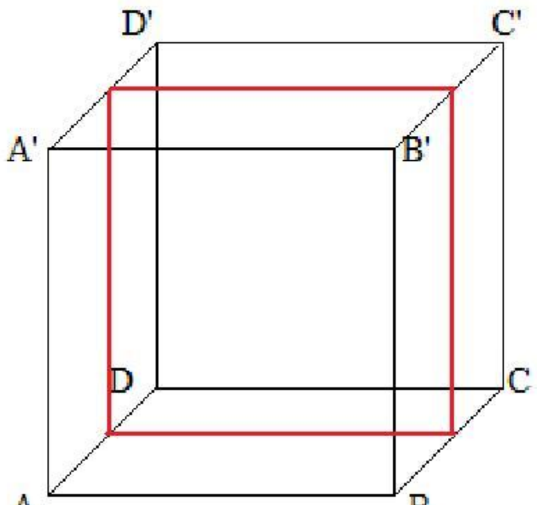
In parole semplici: la vostra soluzione tiene le lumache tutte alla stessa distanza, ma secondo me non è la distanza PIÙ GRANDE POSSIBILE.





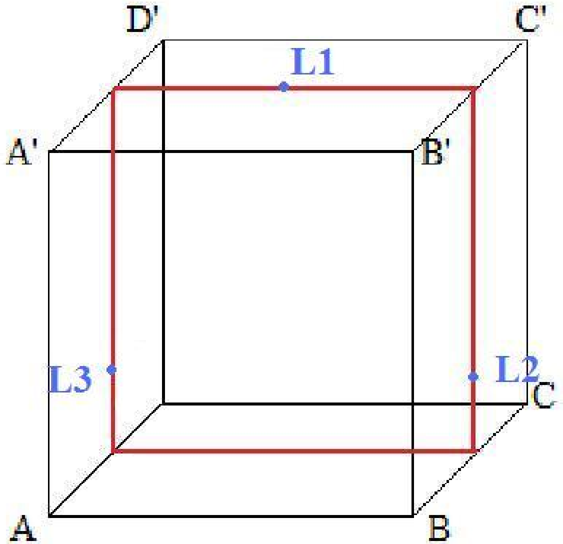
Seconda prova tre lumache

Abbiamo allora pensato di dividere il cubo in due parti uguali e di indicare in rosso il percorso su cui posizionare le tre lumache, segnandolo con uno spago, e di posizionare la prima lumaca L1 nel centro della faccia A'B'C'D'.



Dividendo in tre la misura dello spago si ottiene la distanza tra le lumache e la posizione delle altre due lumache L2 e L3.

Poi abbiamo capito che la lunghezza del percorso è uguale alla misura del perimetro di una faccia, ossia nel nostro cubo



$2p = l \times 4$

Distanza = $2p : 3$

Però…

La distanza è risultata minore di quella trovata con la precedente soluzione.

Terza prova con tre lumache

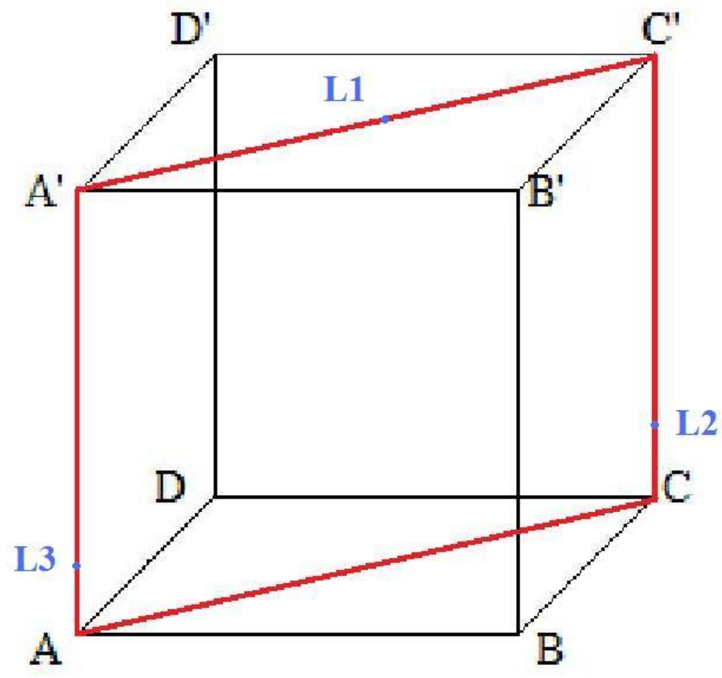
Allora abbiamo pensato di allungare il percorso per dividere il cubo, considerando quello

che unisce i punti A, C, C', A'.

La lunghezza di quest'ultimo è calcolabile sommando le 2 diagonali AC e A'C' e i 2 spigoli AA' e C C'

Se dividiamo per 3 questo valore troviamo la distanza tra le lumache.

Allora posizionando le lumache lungo il percorso segnato nei punti indicati con L1, L2, L3, alla distanza fissata, questa risulta la massima distanza possibile.



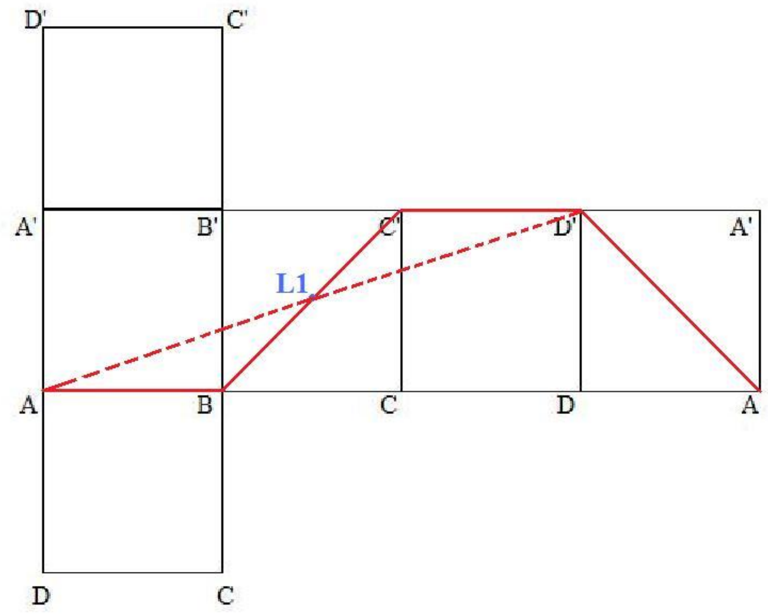
Però…

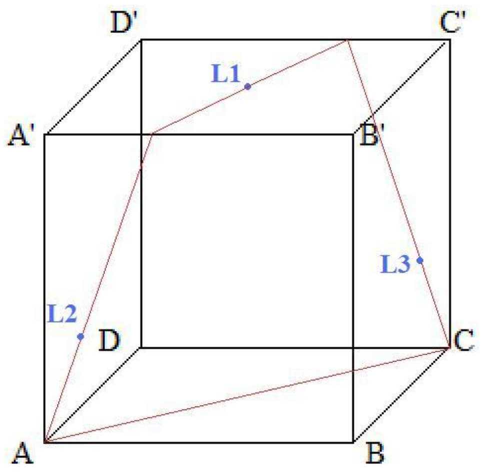
Quarta prova con tre lumache

Un compagno ha pensato che il percorso minimo non è composto da due lati e due diagonali, ma da un segmento uguale alla diagonale del rettangolo formato da tre facce e dalla diagonale di una faccia. Il percorso è minore di quello precedente e va diviso in tre parti, poi si posizionano le lumache iniziando da L1, messa al centro della faccia BCC'B'. Le due parti in cui è divisa la superficie del cubo sono uguali.

Questa ci sembra la massima distanza possibile.

Noi non sappiamo se è la soluzione del problema, ma sfidiamo tutti a trovarne una migliore!





Prova con quattro lumache

Tenendo conto di quanto fatto nel caso di 3 lumache abbiamo deciso di posizionare le lumache nei vertici A, C, B', D'

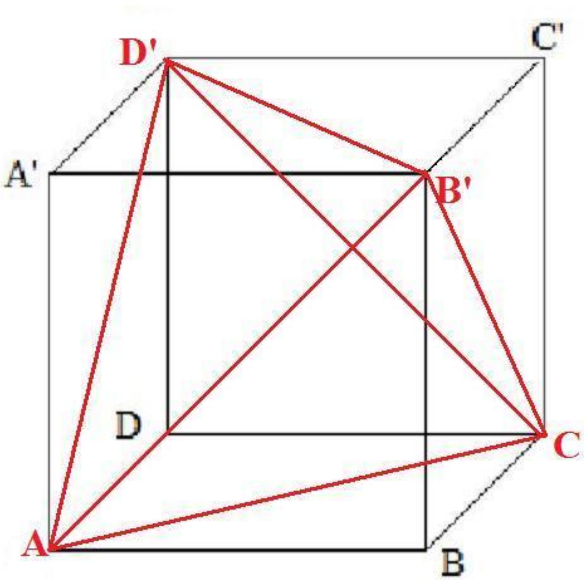
Così facendo le distanze sono:

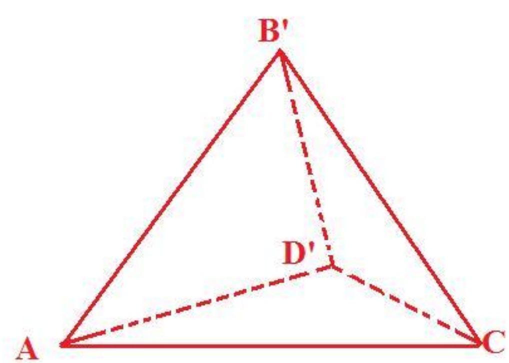
AC, AD', AB', CB', CD', B'D'.

Sono tutte congruenti perché sono le diagonali delle facce del cubo.

Il solido avente come vertici i punti indicati è una piramide a base triangolare con tutti gli spigoli uguali.

La nostra professoressa ci ha detto che si chiama tetraedro ed è un solido regolare perché tutte le facce sono triangoli equilateri congruenti e in ogni vertice arrivano tre triangoli





Grazie

Ringraziamo i lettori per l'attenzione, Claudio che ci ha aiutati in questo lavoro di ricerca e tutti coloro che hanno collaborato al progetto.