

Matematica dall'oculista.

Divertimento teatrale in un atto di Mario Cigada

Oggi Maurizio ha appuntamento dall'oculista, la mamma non può accompagnarlo, così ha chiesto al fratello maggiore, Francesco di farlo lui. Francesco è un ragazzo magro, occhiali tondi, capelli lunghi e l'aria da sognatore; gli amici e il fratello minore lo chiamano "Spillo". Suo fratello Maurizio, detto "Chicco"[2], sembra invece provenire da un altro pianeta: estroverso al limite dell'arroganza, circola con le cuffiette dell'MP3 perennemente intorno al collo, braghe di un paio di misure più grandi ed un paio di scarpe che a me ricordano tanto le chiatte per trasportare la sabbia, quando ancora attraccavano a porta Cicca.

Un'epidemia di influenza ha fatto sì che diversi pazienti annullassero i loro appuntamenti, così l'oculista ha a disposizione una straordinaria quantità di tempo e li riceve quasi subito; è un personaggio strampalato, porta una cravatta a farfalla di un colore improbabile e si muove come se stesse sempre per cadere fuori dal proprio centro di gravità.

Chicco & Spillo arrivano dall'oculista, come sempre hanno passato tutto il tempo a discutere, come tutti i fratelli di questo mondo.

O. Buongiorno, prego accomodatevi.

(Inizia la visita, la raccolta della storia clinica, le manovre diagnostiche e per distrarre Chicco dalle luci intense che è costretto ad utilizzare per esaminargli l'occhio inizia a parlare del più e del meno)

O. Vi ho sentito discutere animatamente prima, in sala d'aspetto... di cosa parlavate in modo così acceso, o è qualcosa di riservato?

S. Sì, ecco, no, cioè.... parlavamo .. di matematica.

O. Di matematica?

Ch. Cercava d'intortarmi, come al solito: questo è fuori di cotenna per i numeri!

S. No... che c'entra... cercavo solo di mostrarti la bellezza, l'estetica dietro la matematica dei numeri complessi.

Ch. Tutte seghe mentali, cose scollegate dalla realtà: i numeri immaginari, ma chi li ha mai visti? E mica soltanto i numeri immaginari anche i numeri negativi! Ma dove sono? I numeri servono al massimo per contare le cose: mi compro una maglietta, il numero degli euro cala e il numero delle magliette aumenta Cosa mi significano magliette negative o euro negativi?

O. Veramente i numeri negativi sono dappertutto! Anche qui dentro. (indica la cassetta delle lenti)

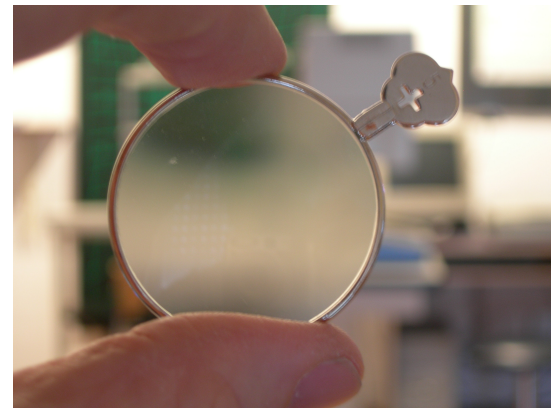
S. Lì dentro?

O. Certo. In questa metà della cassetta ci sono lenti positive, in quest'altra lenti negative.

Ch. E' solo un modo di dire...

O. Non proprio, guarda (prende una lente e la mette davanti al naso di Chicco a circa 20 - 30 cm) come vedi questa lente rimpicciolisce..





mentre attraverso questa (prende un'altra lente) vedi tutto sfuocato.

Come vedi sulla prima lente c'è scritto -5 e sulla seconda +5; adesso guarda...

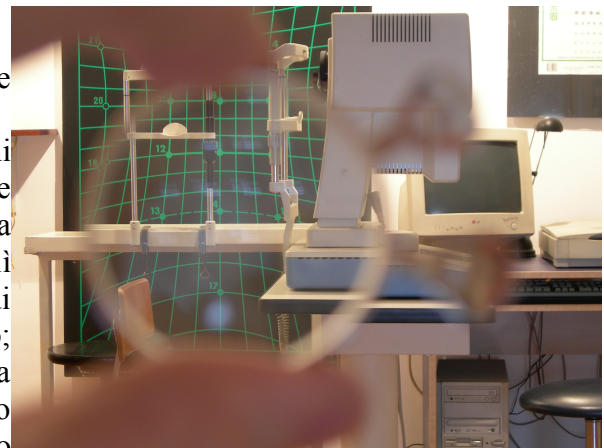
(lentamente porta la seconda lente a sovrapporsi alla prima: gli occhi di Chicco si spalancano mentre Spillo si sporge per sbirciare da sopra la spalla del fratello)

(+5) + (-5) quanto fa?

Ch. Zero ma...

O. E infatti se sommo le 2 lenti sembra di guardare attraverso un normale vetro

Sembra strano che una cosa che sfuoca le immagini sommata ad una cosa che le rimpicciolisce produca ... un bel niente! Eppure lo puoi vedere da te. Vedi, volendo potremmo prendere quel libro lì (indica i 5 volumi rossi delle "Lecture of Physics" di Feynman) e cercare una spiegazione del fenomeno; certo non c'è nulla di magico: il numero scritto sulla lente è la misura della vergenza in diottrie, qualcuno lo chiama il suo potere diottrico. Le diottrie hanno segno negativo se la lente è divergente, mentre hanno segno positivo se la lente è convergente e per i valori negativi si usa il colore rosso, come in banca...



Ch. Sembra complicato

O. Solo un po'; in effetti è un po' complicato spiegare come il tuo occhio reagisca ad una lente -5 con immagini piccole, mentre non riesca a mettere a fuoco attraverso una lente +5. Ma quello che è affascinante è che la matematica ci offre un modello efficace che riassume tutto il complesso discorso fisico e fisiologico in una singola, semplice operazione algebrica:

$$+5 + -5 = 0$$

C'è una corrispondenza sufficientemente precisa tra il modello fisico e quello algebrico, per cui senza stare a fare tutte le volte il ragionamento di dove passa ogni singolo raggio luminoso posso limitarmi alla somma dei 2 valori diottrici.

S. Purché non dimentichi i numeri negativi..

O. E' come se volessi spiegarti dove sta casa mia: posso dirti da Porta Venezia in C.so Buenos Aires, la prima a destra, poi la seconda destra: il primo portone dopo il vicolo a fondo cieco, tu ci arrivi, senza bisogno che ti dica quante vetrine incontrerai, quanti passi devi fare, quanti tombini ci sono, quanti ciottoli nel vicolo

Se poi ti dico via Malpighi 3 è ancora più semplice. In tutti i casi ti ho dato una descrizione; probabilmente sono tutte descrizioni corrette ma alcune sono più sintetiche di altre.[3]

S. Bellino, ma mi sembra banale: in fondo ci si limita a somme e sottrazioni...

O. E' perché abbiamo usato solo le lenti di questa parte della cassetta: qui e qui dove sta scritto "spherical". Se adesso prendiamo in considerazione anche le lenti di questi due scomparti dove sta scritto "cylinder"[4]

Ch. Oh yeah

O. (ridendo) Oh yeah è proprio un discorso di geometria. Le lenti sferiche s'immagina siano realizzate mediante delle sfere: una lente sferica positiva è convessa ed è come un pezzo di vetro che potrebbe esser stato ritagliato da una sfera; una lente sferica negativa è concava è un pezzo di vetro in cui è stata scavata una forma sferica

S. Mentre le lenti cilindriche?

O. In maniera analoga s'immagina siano ricavati da cilindri: i cilindri positivi potrebbero essere fette di un cilindro di vetro, mentre i cilindri negativi sono pezzi di vetro da cui è come se fosse stato scavato via un cilindro -[vedi box ?]

Ch. Sfere, cilindri, geometria, roba buona per la luna....

O. Mica tanto: i cilindri servono per correggere un difetto della vista che si chiama astigmatismo.

Ch. Il Pigi è astigmatico, infatti Truzzo lo chiama sempre "Pigi l'antistatico"

O. Anche tu lo sei: guarda che differenza, così o così (mette delle lenti sulla montatura di prova)

Ch. Così vedo meglio!

O. Perché ho aggiunto il cilindro, cioè la lente cilindrica..

Ch. Forte! Che cilindrata hanno i miei occhiali?

O. Poca roba: meno 0.75 asse 10°

S. Ma come funziona il potere di una lente cilindrica, non capisco

O. Non è complicato: su questo meridiano il valore della vergenza è esattamente il valore in diottrie che sta scritto sulla lente

S. +1

O. esatto questo è un cilindro di una diottria, mentre su questo meridiano, perpendicolare al primo

la lente ha vergenza zero; ora guarda, metto la lente nella montatura di prova [fig...], dove c'è una specie di goniometro, per convenzione misuriamo l'orientamento della lente usando come riferimento il meridiano a valore 0, forse riesci a vedere, c'è un piccolo segno sulla lente; quindi sull'asse 0 la lente vale 0, mentre sull'asse dei 90° la lente vale 1.

Forse hai già sentito di una funzione matematica che vale 0 a 0° e 1 a 90°.

S. Bé c'è il seno...

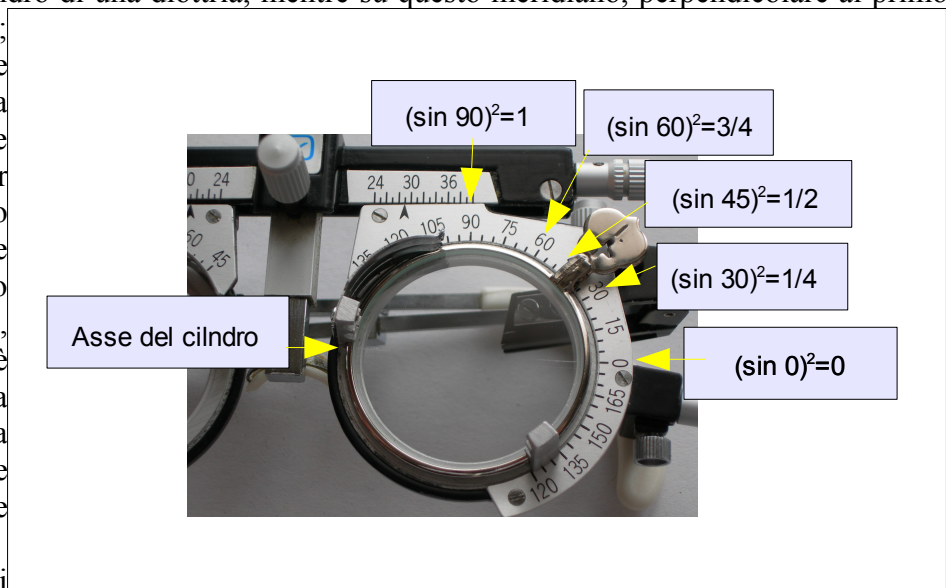
O. giusto, solo che dobbiamo elevarlo al quadrato.

Ch. Spi sei un genio

O. La vergenza è semplicemente il quadrato del seno dell'asse, moltiplicato per il valore della lente, che in questo caso è 1, quindi non cambia. Guarda tutte quelle lenti cilindriche, sono tutte funzioni del seno, con la stessa fase, lo stesso periodo, cambia solo l'ampiezza: riesci ad immaginarle....

Ch. No

O. (con un sorriso) Per giocare con la matematica ci vuole fantasia, ma i grafici aiutano a



visualizzare..... (scrive alcune espressioni al computer)
[fig...]

ecco, ogni curva rappresenta il potere diottrico di una lente cilindrica a seconda (ma i matematici dicono "in funzione") dell'angolo. Così ho disegnato i valori dei cilindri da 1 a 15 diottrie.[5]

Ch. Bello!

S. Ha una sua estetica...

O. Come dicevo un grafico ti aiuta a vedere, ma la cosa più divertente è imparare a vedere con gli occhi della mente...ecco prendo una lente sferica da +3 e la sovrappongo (quindi la sommo) ad una lente cilindrica da +2; quindi su questo asse la lente vale +3 mentre su questo vale +5 questo è un sistema sfero-cilindrico che più propriamente viene chiamato torico, sapete perché?

S. Se non ricordo male il toro è una figura geometrica con la forma di una ciambella

Ch. Sulle lenti a contatto del Pigi c'è scritto thoric.

O. Avete ragione tutti e due le lenti toriche sono idealmente porzioni di un toro, per questo le lenti a contatto di una persona astigmatica in genere sono dette toriche.

Ora faccio passare la luce di questa lampada attraverso in nostro sferocilindro

Ch. Un toro- bicilindrico: boxer.

S. Eh no, o è un toro o è un cane.

O. (ride) E' un toro, un toro, ma ora con la fantasia dobbiamo immaginare che percorso seguano i raggi di luce che attraversano la lente

S. Non è facile...

O. Vero è difficile, ma possiamo usare un trucco (prende un foglio di carta) usando questo come schermo possiamo bloccare i raggi di luce dove vogliamo noi e quindi seguire passo passo il loro percorso...

all'inizio hanno la forma della lente

Ch. E' da lì che escono

O. Bravo poi si restringono fino a formare una linea verticale [fig..]

poi la linea si allarga e si accorcia fino a formare una specie di cerchio [fig..]

Ch. wow!

O. Poi la figura si allarga ancora fino a formare una linea orizzontale. [fig..]

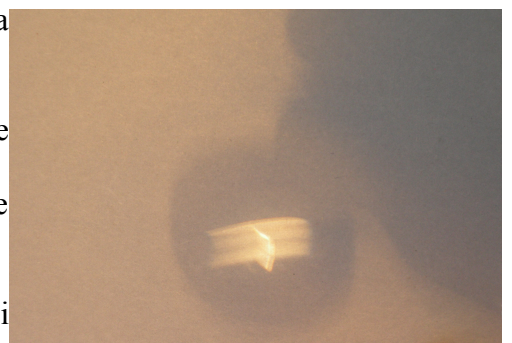
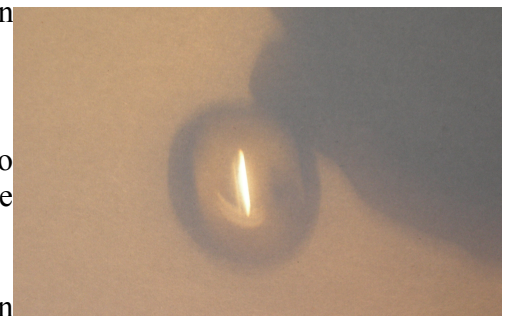
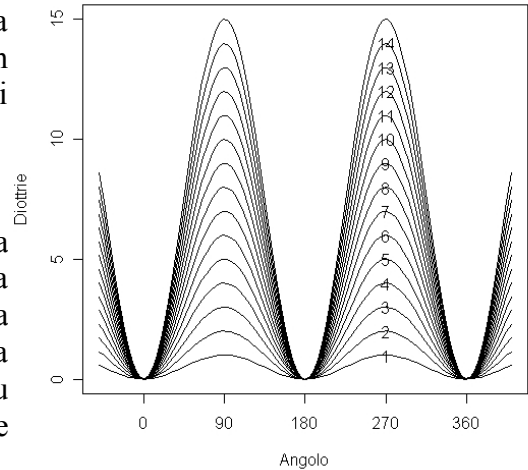
S. Però!

O. Ecco con la fantasia unite tra di loro tutte le figure che avete visto..

poi gli date un nome altisonante "il conoide di Sturm" e state facendo dell'alta geometria.

Ch. Ma perché sempre nomi complicati..

O. E' una bella domanda, vedi tutti hanno il loro gergo, i medici, gli scaricatori di porto, le puttane; magari anche tu dici "a muzzo" quando ti riferisci ad una cosa realizzata non proprio con la massima cura e



scommetto che usi “fisica” per dire “educazione fisica”. A volte è comodo.. soprattutto per l'occhio sinistro

S. Sta scherzando, cosa c'entra l'occhio sinistro?

O. Il fatto è che quando prescrivo ad un mio paziente astigmatico la lente cilindrica, nello scrivere la spiega per gli occhiali...

(a Chicco) - come chiami tu le spiegazioni per fare una torta?

Ch. Ricetta

O. Anch'io, quindi nello scrivere la ricetta per gli occhiali devo riportare i valori delle lenti cilindriche ma devo anche specificare come vanno orientate. Per fare questo si usano i gradi, gli stessi del goniometro che usate a scuola, ma c'è un problema

S. Quale?

O. Dove mettere lo zero del goniometro, cioè da dove iniziare a misurare: da destra, da sinistra da sopra? E poi alla destra del paziente o a destra di chi guarda?

S. Non sembra un problema complicato: basta mettersi d'accordo.

O. Mettersi d'accordo non è mai una cosa semplice.

Curiosamente, nel corso degli anni, gli oculisti han trovato il modo di mettersi d'accordo sull'occhio destro: lo zero si mette alla destra di chi guarda: verso il naso del paziente [fig..??]

Mentre per l'occhio sinistro, a oggi ci sono 2 partiti politici

S. No, anche qui!

O. Il sistema internazionale delle misure (SI) ha stabilito che lo zero vada messo verso il naso del paziente, quindi a sinistra.

S. Il SI ha sempre ragione.

O. Ma in questo modo quando è una macchina a fare la misura devo sempre stare a dirgli se sta misurando la lente dell'occhio destro o quella dell'occhio sinistro il che rende tutte queste macchine molto più complicate e costose...

Ch. Allora?

O. Allora qualcuno ha pensato bene di misurare i 2 occhi alla stessa maniera, partendo sempre da destra, questa notazione si chiama TABO. Potete immaginare chi ha avuto questa idea se vi dico che TABO che sta per Technischer Ausschuss für Brillenoptik.

S. Per le cose pratiche come i tedeschi ci son solo i tedeschi...

O. Penso tu abbia ragione (prosegue) quindi durante la visita devo essere allenato a trasformare i valori di un sistema nell'altro, perché magari non tutti i miei strumenti usano lo stesso sistema o perché il paziente ha in mano una ricetta scritta da un altro oculista in modo diverso... quindi mi alleno 10° SI corrispondono a 170° TABO, 15° SI corrispondono a 165° TABO, 45° SI corrispondono a 135° TABO e viceversa....

Ch. Aspetti aspetti ...io questi numeri li ho studiati... si chiamano angoli supplementari.

O. Ma che bravo! Invece di tutto questo lungo discorso bastava dire: per passare da SI a TABO si deve calcolare l'angolo supplementare, ecco ancora il gergo ci permette di essere più sintetici.

Ch. Certo che con tutta questi conti gli oculisti devono essere grandi amanti della matematica.

O. In effetti no; la maggior parte dei miei colleghi non si aspettava di aver a che fare con tutti questi numeri quando ha iniziato gli studi, così, quando alla fine si è trovato a convivere con algebra, logaritmi e trigonometria semplicemente a cominciato a sopportarli, come si sopporta una suocera bisbetica, quando solo dopo il matrimonio scopri che la tua adorata mogliettina non può stare lontano dalla mamma. Il che è un peccato perché a volte le suocere possono anche essere simpatiche.

S. Scusi, non vorrei sembrare pignolo, ma di logaritmi non abbiamo parlato.

O. (con un sorriso) Non ancora, ma vedi quella tabella là in fondo? La usiamo per cercare di misurare quanto uno ci veda, o meglio quale sia la sua acutezza visiva (AV).

Ch. E come si fa?

O. Si usano le frazioni: a che distanza il mio paziente ha visto una certa lettera, fratto la distanza a

cui avrebbe dovuto vederla se avesse avuto una vista normale.

S. Ma qual è una vista normale?

O. Per una serie di ragionamenti che qui non c'interessano si è stabilito che ha un'acutezza visiva normale chi riesce a distinguere tra di loro due punti che distano tra di loro un primo d'arco, cioè un sessantesimo di grado. Allora si disegnano delle lettere che sono alte 5 primi e con uno spessore del tratto di 1 primo; [vedi box]

Ma capite facilmente che non è molto pratico far camminare avanti e indietro il paziente per scoprire a che distanza vede una lettera, così si costruiscono lettere sempre più piccole, usando le proporzioni.

Ch. Ancora matematica!

O. Sì ma è semplice: se una lettera alta x sottende 5 primi ad una distanza a ; ad una distanza b sottenderà lo stesso angolo una lettera alta y in proporzione:

$x : y = a : b$ e il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi..

Ch. Questo l'ho studiato anch'io

O. Eh già, ma per misurare una cosa è necessario definire una scala.

Ch. In che senso

O. Per misurare quanto è lunga una cosa usi il metro o il righello.

Ch. Certo

O. Bene per fabbricare un righello non basta un segno, ce ne vogliono tanti e qualcuno deve aver deciso dove metterli, di solito se ne mette uno a 1 cm uno a 2 uno a 3 e così via, come se qualcuno avesse deciso che quel righello serve per misurare cose di 1 cm, di 2 di 3 e così via, noi lo diamo per scontato ma non è una cosa banale. Nel caso dell'acutezza visiva bisogna scegliere quali AV (che sono frazioni, vi ricordate?) lo strumento sarà in grado di misurare e cioè quanto grandi fare le lettere. Per ragioni di comodità, qui in Italia e in buona parte d'Europa l'abitudine è quella di "mettere i segni" cioè di disegnare lettere corrispondenti ad acutezze visive corrispondenti a frazioni che abbiano tutte il numero 10 al denominatore 1/10 2/10 3/10 ... fino a diecidedimi, ma è una pura convenzione.

S. Non mi dica che anche qui non c'è uno standard.

O. In Inghilterra usano i sestì.

S. A pensarci bene non mi stupisce

O. Negli Stati Uniti d'America usano frazioni che hanno sempre il numero 20 al numeratore e quindi cambiano il denominatore.

Ch. Eeh?

O. Nel senso che quello che da noi si definisce 1/10 negli USA vale 20/200. In fondo se semplificate la frazione è lo stesso.

S. Quindi nel misurare "la vista" di una persona bisogna anche saper fare i conti con le frazioni.

O. Proprio così.

S. Veramente lei aveva parlato di logaritmi...

O. Ora ci arrivo, vedete quella tabella [fig..A], è una tradizionale tabella decimale: come dicevamo prima ogni riga corrisponde ad un'acutezza visiva rappresentata da una frazione decimale 1/10 2/10 3/10

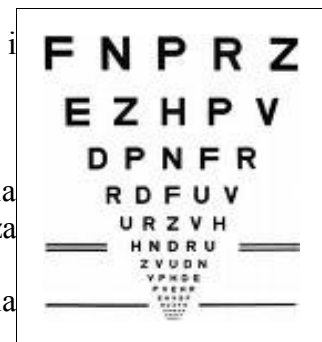
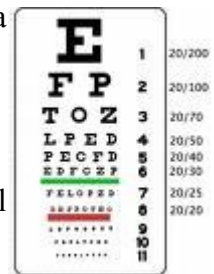
Vedete però come cambiano le dimensioni dei caratteri tra la prima e la seconda riga...

Ch. La seconda sembra circa la metà della prima.

O. Questo crea dei problemi: non si può misurare bene qualcosa che cada lì in mezzo: c'è un salto troppo grande, così si è deciso di usare delle tabelle come questa [fig..B] dove il rapporto tra 2 righe consecutive è costante lungo tutta la tabella

S. E come hanno fatto a farle?

O. Con i logaritmi: prendiamo la successione decimale 0,1 0,2 0,31,0 e la usiamo come



una serie di logaritmi in base 10. Otteniamo una nuova serie di numeri che, divisi per dieci ci danno i quozienti (= le frazioni) che corrispondono alle acutezze visive stimate dalla tabella qui a fianco.

In pratica la seconda riga non misura i 2/10 ma

$(10^{0,1})/10=0,1259$ cioè 1 decimo e 26 circa. E prima di arrivare ai 2/10 (che è la quarta riga) ho ancora $(10^{0,2})/10=0,1585$ cioè più o meno 1 decimo e mezzo.[6]

S. Devo dire che non mi sarei mai immaginato di trovare tanta matematica nello studio di un oculista.

Ch. Non pensavo che la matematica potesse servire a fare gli occhiali

O. E non è finita: prescrivere gli occhiali è solo una piccola parte del lavoro di un oculista; nel definire un occhiale o una lente a contatto i semplici calcoli algebrici che abbiamo visto danno una soluzione più che accettabile, anche se sappiamo che è solo approssimata. Ma quando si tratta di fare un intervento chirurgico..

Ch. Come gli interventi al laser per la miopia

O. Come negli interventi con il laser per correggere una miopia. Lì a volta è necessario fare dei calcoli più precisi, per esempio tenendo conto delle aberrazioni, per questo abbiamo dei bellissimi strumenti matematici...

(all'oculista brillano gli occhi in modo strano, fruga in un cassetto ed estrae un grafico come quello di fig.)

O. Polinomi di Zernike – declama

...ma di questi forse sarà meglio che parliamo un'altra volta [7].

Musica. Si abbassano le luci, un riflettore illumina sul fondo il coro.

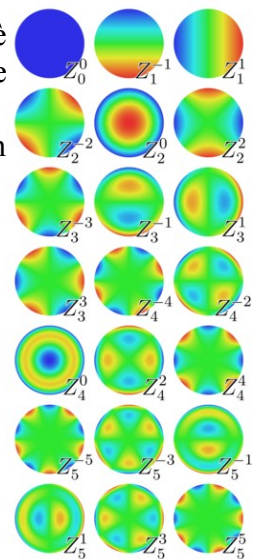
Coro:

*O tristi tempi
quando del Fato schiavo corre Crono
e giace oppressa dalla Sorte ognora
la nostra potestà di avere un po' di tempo.*

*Quando un "occulta del cielo influenza"
sola ci diede ahimè la libertà
di giocare con Voi con numeri e riflessi
e poter fare di scempiaggini palestra.*

*Pregate il Nume
e forte con noi levate un canto
che presto l'uomo trovi il desiderio
di spezzare della fretta i gravi ceppi,*

*che possa almeno un po' fermarsi Marta
e del produrre sappia aver misura
che al sogno ed al pensiero trovi spazio
e il Calvinista Milanese vinto giaccia.[8]*



Sipario

Note e Bibliografia

1. Le informazioni sulle lenti, i difetti di refrazione ed alcuni esempi (come quello del conoide di Sturm) sono presi da 2 libri di G. Paliaga
 - o I vizi di refrazione. Ed. Minerva Medica
 - o L'esame del visus. Ed. Minerva Medica
2. Più di 15 anni dopo la canzone di Bersani qualcosa è cambiato (?)
3. Né l'autore né alcuno dei suoi conoscenti abitano in via Malpighi 3, ma se vi capita di passare in zona val certo la pena di farci un giro: a mio modo di vedere è uno dei palazzi più belli di Milano.
4. Gli oculisti, nel loro gergo, a volte chiamano “sfere” le lenti sferiche e “cilindri” le lenti cilindriche ... (=sferiche) “concave” e “convex”
5. E' facile rifare questo grafico, per esempio usando il software open-source R (cercate “R-project” su Google). Ecco le istruzioni per generare la funzione cil:

```
cil<-function(n) {  
  x<-seq(-4,4,len=101)  
  plot(x, (n*sin(x)^2), type="l", xaxt="n", xlab="Angolo", ylab="Diottrie")  
  for( i in (n-1):1) {  
    lines(x, (i*sin(x)^2), type="l")  
    text (pi/2, (i*sin(pi/2)), lab=(eval(i)))  
  }  
  axis(1, at= c(-pi,-pi/2,0,pi/2,pi), lab=c("0", "90", "180", "270", "360"))  
}
```

cil(n) produce un grafico con n curve relative alle lenti cilindriche da 1 a n.

Un altro divertente esercizio potrebbe essere quello di calcolare il risultato della somma di 2 lenti cilindriche di ugual potere ma orientate a 90° l'una rispetto all'altra. In questo caso la seconda lente è ben descritta da $(\cos a)$ al quadrato e, com'è noto:

$$\sin(a)^2 + \cos(a)^2 = 1$$

da cui si ricava che 2 cilindri ortogonali sono come una lente sferica!

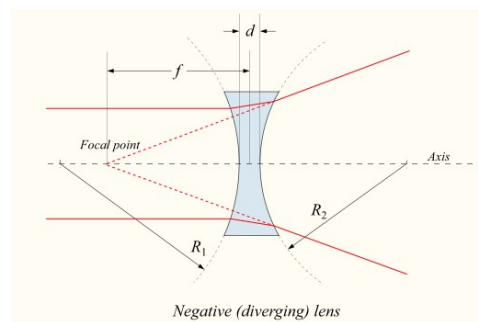
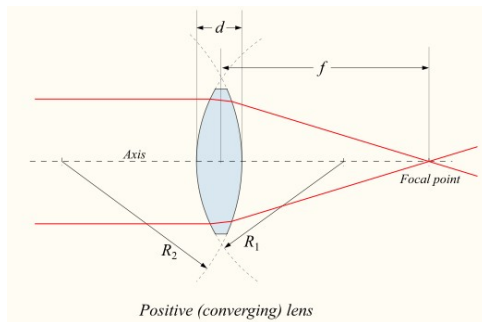
6. E' un discorso complicato, lo so; sul sito www.mariocigada.com potete trovare un esempio di tavola logaritmica, che gli oculisti chiamano anche tavola LogMAR o tavola geometrica; c'è anche il tentativo di spiegare con più parole di quelle che possa usare qui la creazione della tavola.
7. I polinomi di Zernike sono una famiglia di equazioni che descrivono in modo molto efficace ed elegante non solo le lenti sferiche e cilindriche, ma anche le aberrazioni come il coma o l'aberrazione sferica. Non c'è spazio in quest'articolo per approfondire la cosa, per chi fosse interessato, oltre alla mai abbastanza lodata Wikipedia, in rete si trovano numerosi articoli. In effetti volevo confidarvi che la tavola che l'oculista presenta a Chicco & Spillo non è quella in figura ma quella che trovate qui:
www.wfsci.com/Zernike_table.pdf
ma temo sia coperta da copyright per cui non so se sia pubblicabile.
8. Un rapido sondaggio presso alcuni amici mi ha fatto capire che il riferimento a Marta rimane a molti oscuro; permettetemi allora di riportare in bibliografia anche Luca 10,38-42.

Grazie a Gipo Bottoli per il “Calvinista Milanese”

Box1 – Diversi tipi di lenti



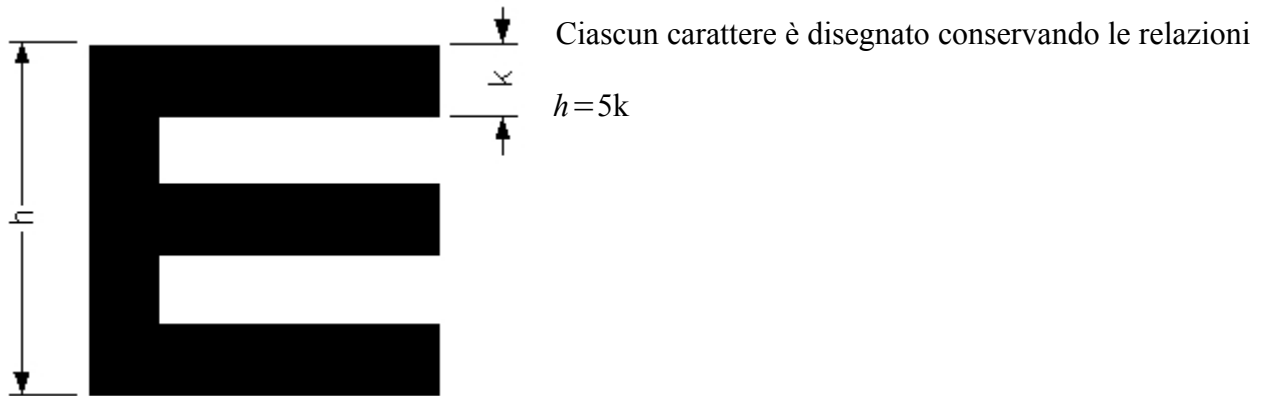
- A) Biconvessa convergente
- B) Biconcava divergente
- C) Piano convessa convergente
- D) Piano concava divergente
- E) Menisco convergente
- F) Menisco divergente
- G) Cilindrica concava
- H) Cilindrica convessa



La vergenza di una lente si misura in diottrie, la diottria è l'inverso della distanza, espressa in metri, tra la lente ed il suo fuoco. Nelle lenti convergenti il valore diottrico ha segno positivo il fuoco sta al di là della lente rispetto alla sorgente luminosa.

Nelle lenti divergenti il valore della vergenza ha segno negativo ed il fuoco (virtuale) sta tra la lente e la sorgente luminosa.

Box 2 – La costruzione di una tavola ottotipica



Prima di tutto si definisce la distanza D cui la tavola dovrà essere usata. In genere $D=4$ metri
A questo punto

$$k = \sin(1/60) \times D$$

ovviamente k e D avranno le stesse unità di misura: se vogliamo avere k in millimetri $D=4000$.

Poi si deve scegliere se si vuol costruire una tavola decimale o logaritmica.

Nel primo caso la serie S delle AV dei rapporti che la tavola sarà in grado di misurare sarà:

$S(\text{decimale}) = 0,1 \ 0,2 \ 0,3 \ 0,4 \ 0,4 \ 0,6 \ 0,7 \ 0,8 \ 0,9$ oltre a 1 per cui abbiamo già calcolato $k = k_{10}$

nel secondo caso

$S(\text{logaritmica}) = (10^{0,1} \ 0,2 \ 0,3 \ 0,4 \ 0,4 \ 0,6 \ 0,7 \ 0,8 \ 0,9) / 10$
(dove il simbolo $^{\wedge}$ sta per elevamento a potenza)

per ciascuno di questi quozienti si calcolerà un k (e un h).

k_i per definizione sottende 1 primo d'arco ($=1/60$ di grado) ad una distanza

$$D_i = S_i \times D$$

ma dal momento che la serie degli k_i e la serie delle distanza D_i formano triangoli simili vale la proporzione

$$k_i : k_j = D_i : D_j = k : D$$

ma vale anche $S_i = \frac{k D_i}{D}$ e $S_i = \frac{D_i}{D}$

per cui semplicemente

$$k_i = k \div S_i$$