

Topologia dei nodi¹

Carlo Petronio²

La topologia è la branca della matematica che studia gli oggetti fatti di gomma elastica, cioè privi di proporzioni definite, nonché deformabili a piacimento (senza però tagli e lacerazioni). Dal punto di vista di un topologo, ad esempio, un palloncino a forma di coniglio è esattamente uguale a uno ovale, dato che egli può trasformarli l'uno nell'altro senza strappi, come in Fig. 1.

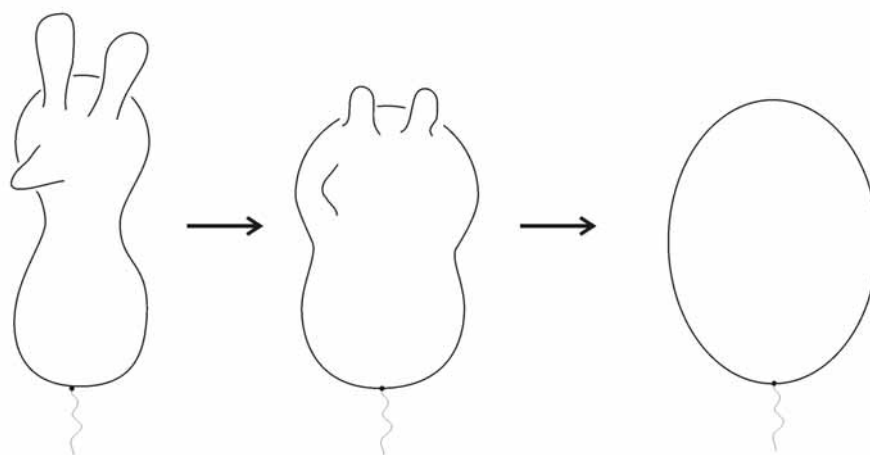


Fig. 1. Per un topologo un coniglio e un palloncino ovale sono uguali.

I nodi, cioè i pezzi di spago variamente ingarbugliati, sono tra gli oggetti di interesse primario della topologia³. In questa introduzione alla matematica dei nodi spiegherò come si fa a disegnarne uno e a decidere che due sono uguali (oppure che non lo sono). Inoltre illustrerò la differenza sostanziale che esiste tra l'osservazione di un nodo dall'esterno e quella dall'interno. Infine farò un balzo in avanti nella dimensione, parlando di superfici (infatti per un matematico un nodo è un oggetto di dimensione 1, mentre una superficie ha dimensione 2). Quindi mostrerò che su un nodo è sempre possibile “appoggiare” (in molti modi, veramente) una superficie. Strada facendo descriverò superfici che hanno la sorprendente proprietà che, se si cerca di dipingerne un lato di un colore, automaticamente risulta dipinto dello stesso colore anche l'altro lato (sicché, più precisamente, si può dire che di lati ne hanno uno solo).

Nodi, link e complementari

Quello di *nodo* è un concetto matematico che deriva dall'astrazione di ciò che anche nella vita quotidiana si indica con lo stesso nome. Un “nodo” è quello che si fa ai lacci

¹ Ringrazio calorosamente Katya Pervova, che ha prodotto tutte le illustrazioni di questo saggio.

² Dipartimento di Matematica Applicata, Via Filippo Buonarroti 1C, 56127 Pisa, Italy. E-mail: petronio@dm.unipi.it.

³ Insieme ai loro cugini, i *link*, che sono semplicemente oggetti fatti da più nodi che non si toccano. Non esiste una traduzione accreditata in lingua italiana dell'inglese “link”, dunque userò il termine originale.

delle scarpe, oppure che (purtroppo per il pescatore inesperto) spesso si forma in una lenza. Come già spiegato nell'introduzione, però, il punto di vista che voglio adottare qui è quello di un topologo, che considera uguali due oggetti quando li sa deformare, senza strappi, l'uno nell'altro. Ed è chiaro che, usando magari molta pazienza, una volta staccato l'amo, il pescatore riesce sempre a districare il groviglio della sua lenza, poiché c'è un estremo libero della stessa che egli può far scorrere attraverso il garbuglio (vedi⁴ Fig. 2). Quindi, per un topologo, un nodo ottenuto da un pezzo di spago può diventare davvero annodato solo se, fatto il groviglio, egli salda insieme i due estremi rimasti liberi⁵. Alcuni esempi di nodo si trovano in Fig. 3.

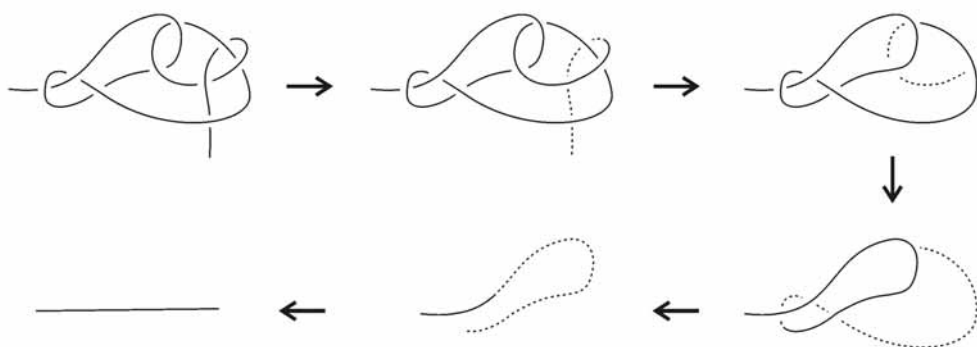


Fig. 2. Con gli estremi liberi, un nodo non è mai veramente annodato.



Fig. 3. Il nodo banale, il nodo a trifoglio, il nodo a otto e un nodo più complicato.

Ho detto prima che il nodo del topologo è una *astrazione* del nodo di tutti i giorni perché lo spago o la lenza, per quanto sottili, hanno sempre un determinato spessore, mentre in termini matematici si deve intendere che lo spessore del materiale con cui il nodo è realizzato sia “nullo”. La formalizzazione di questa idea richiede nozioni tecniche e di fatto non è particolarmente interessante, dunque procederò adottando soltanto la seguente definizione operativa: ***un nodo è un oggetto nello spazio ottenuto da un corda sottilissima, perfettamente flessibile ed elastica, con la quale viene formato un garbuglio e della quale alla fine vengono saldati insieme i due estremi. Lo spessore della corda è così piccolo che non bisogna mai preoccuparsene mentre si manipola il nodo.***

Equivalenza di nodi. Un altro termine che mi conviene precisare prima di procedere è quello di *uguale* riferito a un nodo rispetto a un altro. Secondo il significato quotidiano

⁴ Esaminando la Fig. 2, bisogna ricordare che il nodo è fatto di un materiale elastico, quindi può liberamente accorciarsi (o estendersi).

⁵ Con una corda di nylon da bucato e un accendino non è difficile farlo davvero.

di questa parola, i sei nodi mostrati nella Fig. 4 certamente non sono “uguali” tra loro. Per esprimere il fatto che tuttavia essi così appaiono agli occhi del topologo, li chiamerò allora equivalenti. Ecco dunque la seconda definizione operativa che impiegherò nel seguito: *due nodi sono tra loro equivalenti quando si possono deformare l'uno nell'altro senza strappi o rotture*. La Fig. 4 suggerisce appunto un esempio di deformazione siffatta.

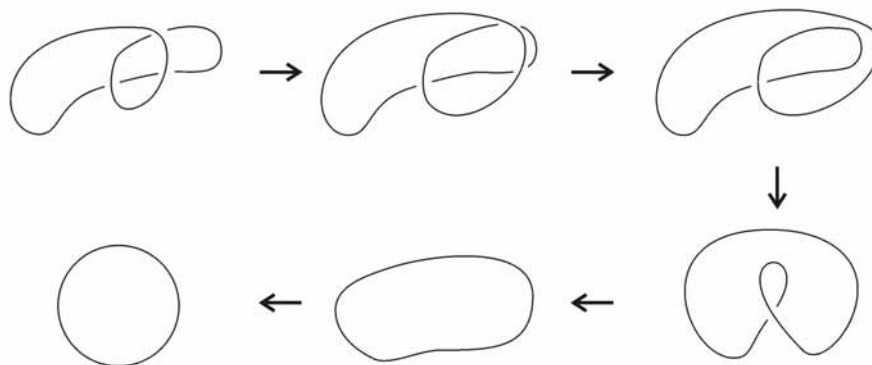


Fig. 4. Una deformazione del nodo banale.

Come avevo anticipato in nota, la nozione di nodo ha una semplice estensione: *un link è un oggetto formato da due o più nodi che non si toccano a vicenda* (e che possono o meno intrecciarsi fra loro); *due link sono equivalenti se sono deformabili l'uno nell'altro*. Alcuni esempi di link sono mostrati in Fig. 5.

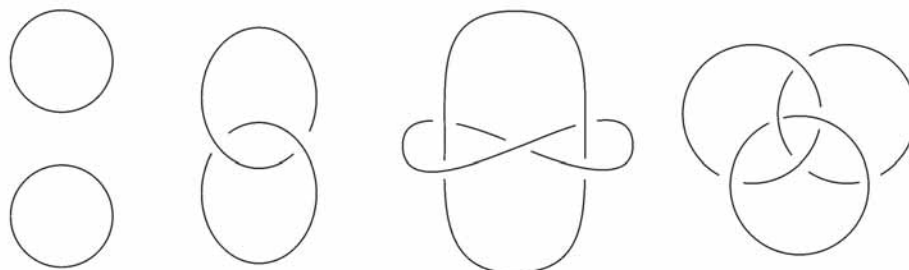


Fig. 5. Alcuni link: banale a due componenti, di Hopf, di Whitehead, di Borromeo.

Anche se non potrò realmente addentrarmi, voglio menzionare la questione principale della teoria dei nodi, cioè il *problema dell'equivalenza*. Se mi vengono presentati due nodi molto complicati, come posso stabilire se sono o meno equivalenti? Il tentativo più naturale è quello di prendere due corde da bucato molto lunghe e molto sottili, realizzare fisicamente i nodi tramite esse⁶ e passare un pomeriggio a manipolarle.⁷ All'ora di cena, due cose possono essere successe: o sono riuscito a modificare i due nodi in modo che alla fine siano proprio identici, oppure no. Nel primo caso concludo che i nodi iniziali erano equivalenti, ma nel secondo? La risposta, purtroppo, è che non posso dire nulla! Infatti la mia abilità e fantasia potrebbero essere state insufficienti a

⁶ Ricordando di saldare bene insieme gli estremi con l'accendino.

⁷ Senza imbrogli: le forbici restano nel cassetto.

farmi intuire il modo giusto di rigirarmi tra le mani i nodi. Magari un altro pomeriggio di manipolazioni (o cinque minuti di qualcuno più sveglio di me) condurrebbero alla scoperta che i nodi iniziali erano in effetti equivalenti. Per stabilire che due nodi non sono equivalenti non basta dunque un numero anche molto grande di tentativi falliti di deformarli l'uno nell'altro: serve un argomento generale⁸ da cui segua che *nessuna* deformazione potrà mai trasformare un nodo nell'altro.

Complementare di un nodo. Un punto di vista molto spesso utile, sul quale tornerò nel seguito, è quello di considerare, piuttosto che il nodo, ciò che resta dello spazio tridimensionale una volta che il nodo sia stato rimosso. Per spiegare questa idea parto da una analogia ma più semplice, immaginando di avere disegnato un quadrato su un normale foglio di carta. Il quadrato (inteso come tutta l'area racchiusa dai lati, non solo come l'insieme dei quattro lati) è un oggetto dotato di dignità autonoma. Ma invece che al quadrato posso decidere di pensare a ciò che resta del foglio dopo avere tolto il quadrato. In questo esempio posso realizzare l'idea in modo molto facile: prendo un paio di forbici, ritaglio il quadrato e lo butto via, dunque mi interesso a quello che resta. Però posso fare anche a meno delle forbici: mantenendo il foglio integro, decido che farò delle osservazioni (come ad esempio misurare l'area, anche se questa non è una operazione da topologo) percorrendo, da abitante del foglio, solo la parte di esso fuori dal quadrato. Scegliendo questo punto di vista, anche se non rimuovo fisicamente il quadrato, decido che l'orizzonte delle mie osservazioni è il foglio escluso il quadrato. In altre parole, il quadrato resta dov'è, ma io decido che il mio campo visivo non può raggiungerlo: vedo solo la restante parte del foglio. Tornando al caso che mi interessa, l'idea di escludere qualcosa dal campo visivo è proprio il modo giusto di intendere la rimozione di un nodo dallo spazio tridimensionale. Infatti non posso pensare di ritagliare il nodo e toglierlo fisicamente dallo spazio senza attraversare ciò che non ho ritagliato.⁹ Posso finalmente dare una definizione, seppure informale: *il complementare di un nodo è lo spazio tridimensionale escluso il nodo medesimo, cioè il campo di osservazione ed esperienza di qualcuno cui si dia licenza di spostarsi come gli pare purché non tocchi (né arrivi mai a vedere) il nodo.*

Diagrammi e mosse di Reidemeister

Tutte le figure di nodi (e link) che ho mostrato finora, per il semplice e incontrovertibile fatto di essere tracciate sul foglio di una pagina di questo volume, sono piatte (cioè bidimensionali), ma non penso che a chi legge siano venuti dubbi sul fatto che esse

⁸ Il metodo più tipico è il seguente. Si trova il modo di associare ad ogni nodo un oggetto di natura più semplice, come la risposta Sì/No a una facile domanda, oppure un numero, o un polinomio per chi sa cos'è. Quindi si verifica che se due nodi sono equivalenti allora l'oggetto ad essi associato è lo stesso. (Questa di solito è la parte più difficile, che richiede una *dimostrazione*; nel seguito vedremo un esempio.) Acquisito questo armamentario, avendo due nodi, si calcolano gli oggetti corrispondenti; se si scopre che tali oggetti sono distinti, allora i due nodi iniziali non sono di certo equivalenti. Tuttavia può benissimo darsi che a nodi non equivalenti venga associato lo stesso oggetto, quindi se gli oggetti corrispondenti a due nodi sono uguali non si può trarre alcuna conclusione.

⁹ Per ritagliare un nodo dallo spazio avrei bisogno di una "quarta dimensione". Infatti nel caso del quadrato disegnato sul foglio l'operazione di taglio e rimozione funziona perché il foglio ha dimensione 2 mentre io lavoro nello spazio tridimensionale. L'idea che esistano spazi con dimensione maggiore di 3 può inizialmente sembrare bizzarra, ma è in realtà tra le prime acquisizioni per uno studente di matematica o fisica.

rappresentano pezzi di corda per annodare i quali devo operare nello spazio, cioè nell'ambiente tridimensionale (fanno eccezione il nodo e il link banali, che sono in effetti piatti). La ragione ha a che fare con il modo stesso nel quale i sensi percepiscono un'immagine e il cervello la elabora. Senza addentrarmi nella teoria della visione, mi limito qui a ragionare su cosa sia una fotografia. Quando tengo in mano il cartoncino plastificato su cui è stampata un'istantanea, ho a che fare indubbiamente con qualcosa di piatto, ma ci sono elementi in quello che guardo (i chiaroscuri, la disposizione relativa degli oggetti) sufficienti a suggerire alla mia mente le caratteristiche spaziali di ciò che la fotografia ritrae. E questo è precisamente ciò che accade per le figure dei nodi, che si chiamano *diagrammi*. Una loro descrizione pedissequa sarebbe infatti quella di una serie di curve nel piano, più o meno sottili, interrotte in diversi punti. Però l'intuizione che esse inducono è quella di curve continue: le interruzioni servono a suggerire che ci sono punti in cui un tratto di spago è più lontano¹⁰ di un altro tratto dall'obiettivo della macchina fotografica.

Proiezioni e diagrammi. L'analogia con la fotografia serve a spiegare meglio cosa significhino esattamente i diagrammi dei nodi e dei link. Fotografare un oggetto (da molto lontano) significa scegliere una direzione dalla quale guardarlo, considerare un piano perpendicolare a questa direzione¹¹ e riportare¹² sul piano, seguendo la direzione scelta¹³, tutti i punti visibili dell'oggetto, come nell'esempio di Fig. 6. In matematica *si chiama proiezione ortogonale di un oggetto su un piano la figura piatta che si ottiene riportando sul piano tutti i punti dell'oggetto lungo la direzione perpendicolare al piano.*

¹⁰ Visto che di solito si immagina di guardare la foto appoggiata a un tavolo, quindi dall'alto, il tratto di spago "più lontano" è quello che *passa sotto*.

¹¹ Potrei dire che questo piano è la lastra o pellicola fotografica, se nell'era digitale questi termini non fossero ormai desueti.

¹² "Riportare" significa trasferire graficamente; si può fare con una penna oppure, come nella fotografia, provocando una reazione chimica nella quale un sale d'argento cambia colore.

¹³ Per essere precisi, la direzione lungo la quale i punti vengono riportati sul piano è esattamente la stessa per tutti solo se il piano è "infinitamente lontano" dall'oggetto, il che tra l'altro annulla la prospettiva.

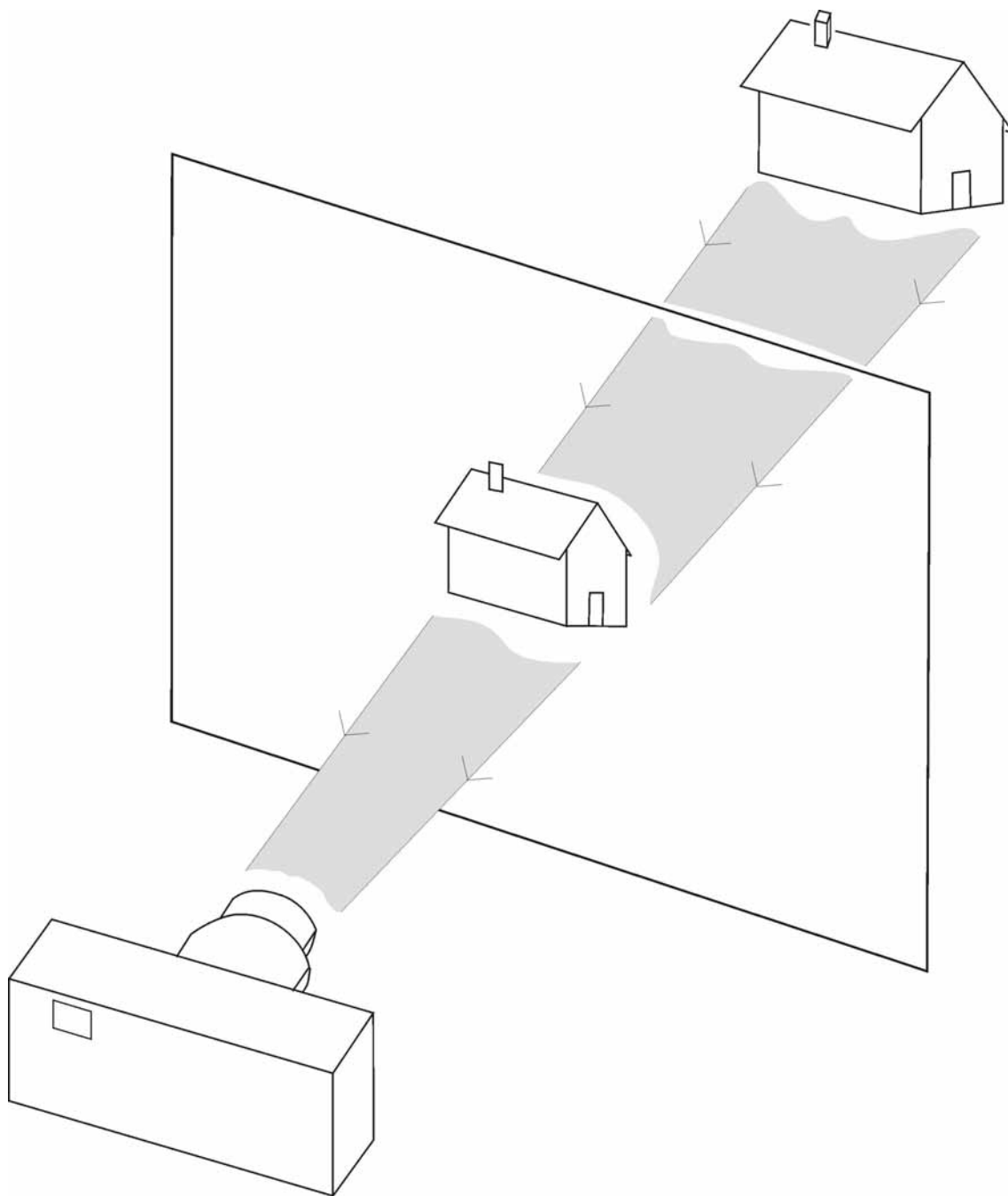


Fig. 6. Fotografia di un oggetto.

Considero ora un nodo (nel senso di una corda da bucato ingarbugliata con gli estremi saldati) e ne faccio una fotografia, cioè ne prendo una proiezione ortogonale su un piano. Se tutto va bene la proiezione sarà, nel piano, una curva continua e liscia, che però avrà degli incroci. Ma da questa curva, come si vede nella parte sinistra della Fig. 7, non riesco a farmi un'immagine tridimensionale del nodo. Invece ottengo un'ottima immagine se nella proiezione, vicino agli incroci, interrompo leggermente la parte di curva che corrisponde al tratto di corda più lontano dal piano su cui proietto.

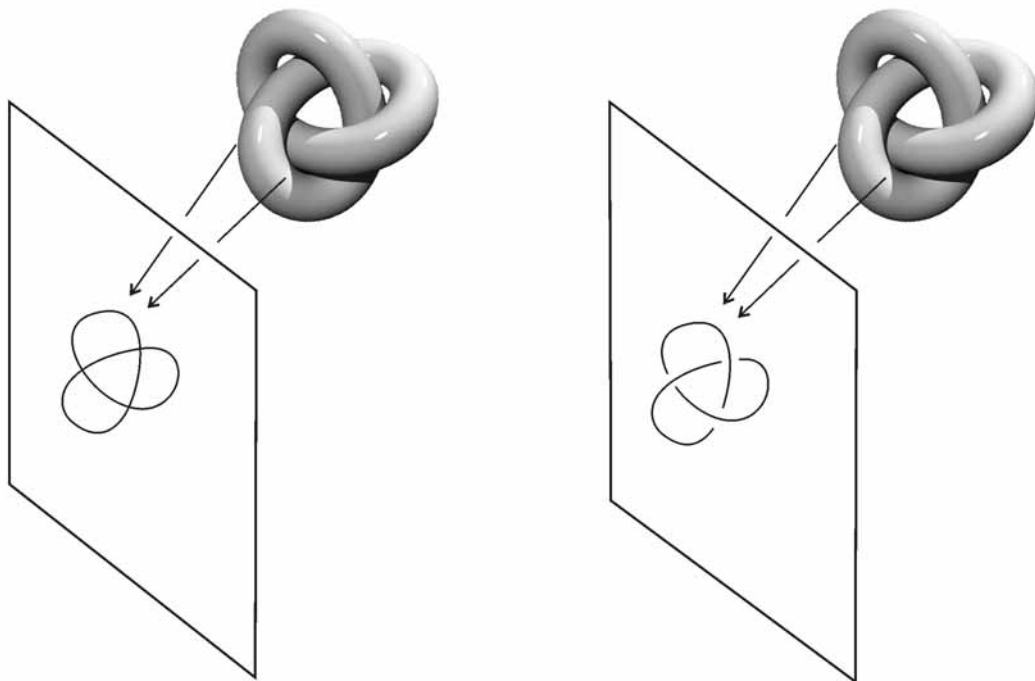


Fig. 7. Proiezione ortogonale di un nodo a trifoglio e diagramma, ottenuto con un piccolo ritocco di tale proiezione, che consente di ricostruire il nodo spaziale.

In definitiva *si chiama diagramma di un nodo una sua proiezione ortogonale con interruzione ad ogni incrocio del ramo più lontano dal piano di proiezione*. Solo di passaggio menziono però una piccola sottigliezza. Sopra ho detto che “se tutto va bene” la proiezione è come mi aspetto. In realtà ci sono alcune sfortunate scelte del piano di proiezione per le quali non tutto va così bene. Ad esempio possono presentarsi i fenomeni descritti in Fig. 8, e anche di peggiori¹⁴.

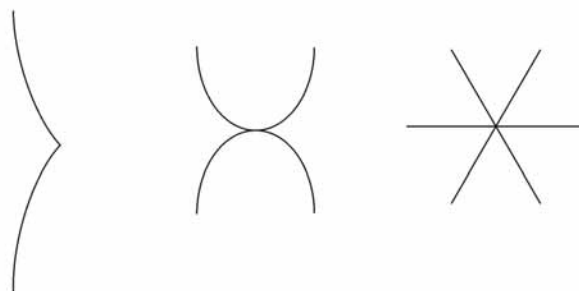


Fig. 8. Proiezioni “cattive” di un nodo: un punto in cui la curva non è liscia (cuspidi); un punto in cui due rami della curva si toccano

¹⁴ Di fatto, però, le proiezioni “cattive” sono rarissime: scegliendo a caso un piano di proiezione, infatti, si ha la quasi certezza che esso sia “buono” e comunque, se è “cattivo”, basta modificarlo di pochissimo per farlo diventare “buono”.

senza incrociarsi; un punto in cui si incrociano tre rami della curva.

Mosse sui diagrammi. Avendo spiegato l'interpretazione corretta delle figure dei nodi (i diagrammi), posso ora illustrare come si traduca usando tali diagrammi l'idea di deformazione. Se infatti un diagramma non è altro che la fotografia di un nodo, cioè una proiezione ritoccata in modo che negli incroci si capisca ciò che è vicino e ciò che è lontano, una deformazione non sarà altro che una sequenza di fotografie, cioè un film. Come al cinema, però, ci saranno sequenze nelle quali non succede quasi nulla (vedi Fig. 9), e alcuni fotogrammi invece in cui la scena cambia in modo importante.

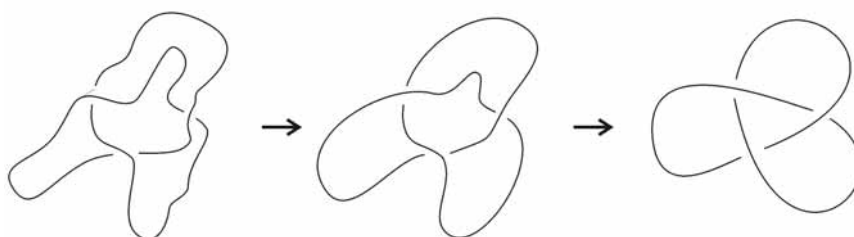


Fig. 9. Deformazione planare di un diagramma di nodo.

Senza cercare di spiegarlo formalmente, posso dire che le sequenze poco interessanti sono quelle che corrispondono a deformazioni del diagramma di nodo in quanto oggetto contenuto nel piano, mentre i fotogrammi importanti sono quelli in cui il diagramma cambia davvero. E il bello è che di fatto, se tutto va bene¹⁵, i fotogrammi importanti saranno pochi, e precisamente quelli che contengono una delle situazioni di Fig. 8. Siccome però una proiezione di nodo che contiene una di queste situazioni non dà luogo a un diagramma, la consuetudine è quella di tagliare dal film i fotogrammi incriminati, saltando bruscamente dal diagramma che si aveva poco prima della scena indecente a quello che si ha subito dopo. Dopo l'opera del censore, i salti nel film sono tutti dei tipi descritti in Fig. 10.

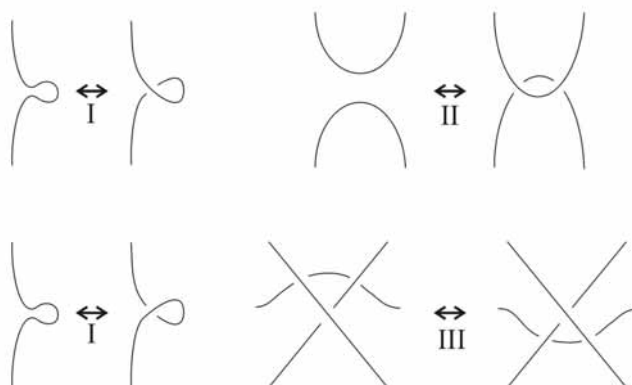


Fig. 10. Le mosse I, II e III di Reidemeister.

¹⁵ Il significato è quello descritto in precedenza: se si sistema la macchina da presa a caso quasi di certo si avrà un "buon" film della deformazione; e se per caso si ottiene un film "cattivo" basta girare di nuovo la scena spostando di pochissimo la macchina, e il nuovo film sarà "buono".

Le trasformazioni descritte nella Fig. 10 si chiamano mosse di Reidemeister e vanno intese nel modo seguente: dato un diagramma di nodo, si seleziona una porzione del diagramma che appaia come uno qualsiasi dei frammenti in Fig. 10, quindi, lasciando inalterato il resto del diagramma, si sostituisce la porzione prescelta con il frammento in Fig. 10 collegato con una doppia freccia a quello precedente.¹⁶

Essendo un matematico, non posso ora esimersi dall'inserire nell'articolo, per quanto la sua natura sia divulgativa, almeno un enunciato formale:

Teorema. *Ogni diagramma rappresenta un nodo. Ogni nodo può essere rappresentato da diagrammi. Due diagrammi rappresentano nodi equivalenti precisamente quando si possono ottenere l'uno dall'altro tramite deformazione piana ed esecuzione (ripetuta) di mosse di Reidemeister¹⁷.*

Punto di vista intrinseco ed estrinseco

Parlando del complementare di un nodo ho già menzionato l'idea che un oggetto di interesse topologico si possa guardare "dal di dentro". In quel caso, per quanto possa sembrare che io giochi con le parole, l'oggetto che proponevo di esaminare *dall'interno* era proprio *l'esterno* del nodo, cioè quel che resta del nostro mondo tridimensionale una volta immaginato di aver rimosso il nodo. Ma la stessa operazione di restrizione di visuale la posso fare (e anzi è molto più semplice) per il nodo stesso piuttosto che per il suo complementare. L'idea è che devo immedesimarmi in un abitante del nodo, cioè in

¹⁶ Se il fotogramma censurato è ad esempio quello centrale in Fig. 8, non è possibile stabilire se subito prima di esso ci fossero due incroci in più o due in meno rispetto a subito dopo. Per questo ogni mossa va intesa nelle due direzioni. Le due versioni in Fig. 10 della mossa I sono in effetti diverse tra loro, ma sono indicate con lo stesso simbolo per ragioni storiche e matematiche che non spiegherò in questa sede.

¹⁷ Come applicazione di questo teorema accenno almeno alla dimostrazione del fatto che il nodo banale e quello a trifoglio, cioè i primi due di Fig. 3, sono in effetti non equivalenti. Uso l'idea menzionata in precedenza di associare un oggetto "semplice" a ogni nodo e verificare che nodi equivalenti danno lo stesso oggetto. In effetti, grazie a questo teorema, per fare ciò è sufficiente associare un oggetto a ogni diagramma e provare che l'oggetto non cambia quando si esegue una mossa di Reidemeister. L'argomento è il seguente. Dato un diagramma di nodo, chiamo *arco* un suo tratto continuo, come se il diagramma fosse davvero spezzato dove la curva è interrotta. Dunque nella Fig. 3 il numero di archi dei diagrammi è rispettivamente 1, 3, 4 e 8. Scelgo ora tre colori diversi e con un pennello dipingo di un certo colore ciascun arco del mio diagramma. Chiamo il risultato una *tricolorazione* del diagramma se ho utilizzato tutti e tre i colori e se, vicino a ogni incrocio, i tre archi che vedo hanno tutti lo stesso colore *oppure* hanno tre colori distinti. (Attenzione: può ben darsi che vicino a qualche incrocio ci sia un solo colore e vicino a qualche altro ce ne siano tre: l'importante è che non ce ne siano mai due.) Quindi mi pongo la domanda: *il mio diagramma ammette una tricolorazione?* La risposta è chiaramente "No" per il nodo banale (c'è un solo arco, dunque non posso usare tutti e tre i colori) ed è "Sì" per il nodo a trifoglio (ci sono tre archi, basta dare a ognuno un colore diverso). Ora con un po' di pazienza si può verificare che se due diagrammi sono collegati da una mossa di Reidemeister la risposta alla domanda per l'uno e per l'altro è la stessa. Dunque il nodo banale e quello a trifoglio non sono equivalenti. Dato che il nodo a trifoglio è "manifestamente" annodato, può sembrare strano che dimostrarlo sia così complicato, ma nessuno ha mai trovato un argomento più semplice. Per la cronaca, il nodo a otto non è tricolorabile (basta fare qualche prova con il diagramma di Fig. 3). Dunque il nodo a otto non è equivalente al nodo a trifoglio. In realtà si può vedere che non è neppure equivalente al nodo banale, ma l'argomento sull'esistenza di una tricolorazione non basta. Anche l'ultimo nodo di Fig. 3 non è equivalente ad alcuno dei precedenti.

qualcuno per il quale il nodo rappresenta l'unico orizzonte visivo: mai e poi mai potrà contemplarne l'esterno.

Dialogo tra abitanti di nodi. Come descrive il suo mondo un abitante del nodo? Siccome tra simili ci si comprende meglio, provo a immaginare un dialogo via radio tra abitanti di nodi diversi e lontanissimi tra loro. Si chiamano Ban e Trif.

Ban: "Pronto, Trif, mi ricevi? Passo."

Trif: "Ti ricevo benissimo, Ban! Come mai mi chiami? Passo."

Ban: "Ho pensato oggi di descriverti come è fatto il mio mondo per vedere se assomiglia al tuo. Ti va? Passo."

Trif: "Volentieri, anch'io me l'ero sempre chiesto. Cosa facciamo? Passo."

Ban: "E cosa vuoi che facciamo? Non so tu, ma io di scelte non ne ho molte. Posso solo mettermi a camminare, in avanti oppure indietro. La direzione non posso cambiarla, posso solo decidere di fare il gambero oppure di avanzare. Passo."

Trif: "Vero, anch'io quanto a libero arbitrio non sono messo bene. Che ne dici, camminiamo in avanti tutti e due? Passo."

Ban: "Perfetto. Appena ti cedo la comunicazione partiamo tutti e due e ci teniamo in contatto. Passo."

...

Trif: "Pronto Ban, tutto bene? Io cammino da cinque minuti e non mi sto divertendo. Non ho mai avuto altra scelta che continuare ad andare avanti. E tu? Passo."

Ban: "Uguale identico, una noia mortale. Però continuiamo, OK? Passo."

...

Trif: "Un attimo, Ban... Qui pare che finalmente succeda qualcosa! Non te l'avevo detto, ma prima che tu dessi il segnale di partenza avevo fatto un segno rosso per terra, per accorgermi se ripassavo dallo stesso punto. E adesso ci sono! Passo."

Ban: "Incredibile! Pensa che io avevo fatto la stessa cosa... Il mio segno veramente era blu, ma anche io ci sono arrivato proprio adesso. Quindi tutti e due abbiamo camminato senza mai fermarci, senza mai incontrare bivi, e siamo tornati allo stesso punto. Sembra che i nostri mondi si somiglino molto. Magari sono proprio uguali! Passo."

Trif: "Vacci piano, Ban. È vero, abbiamo compiuto la stessa esplorazione osservando le stesse cose, ma per trarre la conclusione che dici dovresti essere sicuro che il tuo mondo lo hai visitato tutto, no? Passo."

Ban: "E io sono sicuro, Trif! Come ti ho detto, non ho mai lasciato inesplorate delle strade, potevo andare solo dritto e l'ho fatto. Quindi ho percorso tutto il mio mondo, così come hai fatto tu. E abbiamo visto le stesse cose: quindi i nostri mondi sono uguali!"

Ban e Trif hanno perfettamente ragione, il loro dialogo è sensato e così è la loro conclusione. Dunque *intrinsecamente* i loro mondi sono uguali. Tuttavia (il trucco dei nomi era ingenuo) i loro mondi sono rispettivamente il nodo banale e il nodo a trifoglio, che dall'esterno appaiono drasticamente diversi (vedi Fig. 11).

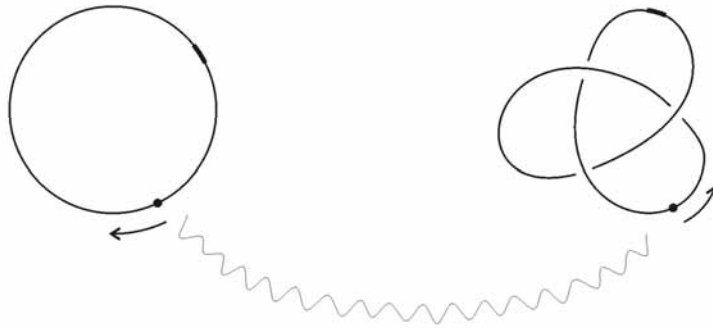


Fig. 11. Ban e Trif scoprono che i loro mondi sono uguali. Le palline rappresentano loro, i trattini i punti da cui sono partiti, le frecce le direzioni in cui camminano, e la scarica elettrica la comunicazione che hanno dopo 5 minuti di marcia.

Un altro dialogo. Affrontando il rischio essere accusato di blasfemia, espongo ora un altro dialogo che dimostra che i mondi di Ban e Trif sono uguali. Uno dei protagonisti è uguale, l'altro cambia:

Trif: “Cos’è questo boato? Chi mi chiama? Che succede?”

Dio: “Sono il creatore del tuo mondo.”

Trif: “Mamma, che paura! Ehm... Posso fare qualcosa per te?”

Dio: “Voglio fare una cosa, ma non spaventarti, non ti farò male. Ora tu ti sposti da dove sei e io taglio il tuo mondo esattamente nel punto dov’eri. Pronto?”

Trif: “Ecco, ho fatto tre passi indietro.”

Dio: “Bene, ho tagliato. Vedi qualche differenza?”

Trif: “Certo: prima potevo camminare avanti e indietro, mentre ora se faccio tre passi avanti il mondo finisce e non posso più procedere.”

Dio: “Se è per quello, anche se ti metti a camminare all’indietro dopo un po’ vedi che il mondo finisce. Ma non farlo. Abbi un attimo di pazienza mentre io faccio qualcos’altro... Ecco, finito! Sentito nulla?”

Trif: “No, a me non pare che sia cambiato niente.”

Dio: “Infatti, per te no. Ora però riattacco dove ho tagliato... Fatto! Che ne dici?”

Trif: “Hai tagliato e poi riattaccato nello stesso punto, quindi hai ricreato il mondo di prima! Sono di nuovo nel mondo di cui poco fa parlavo con Ban: parto da un punto, cammino senza mai incontrare bivi, e torno in quel punto.”

Dio: “Infatti, dal tuo punto di vista sei nello stesso mondo di prima. Arrivederci.”

Trif: “E’ stato un piacere! Alla prossima, Dio.”

Dopo avere tagliato il mondo di Trif, Dio ha fatto più o meno quello che ha fatto il pescatore nella Fig. 2: ha sciolto il nodo a trifoglio. Trif non si è accorto di nulla, perché durante la deformazione il suo mondo (tagliato) non cambiava. Poi, quando Dio ha riattaccato dove aveva tagliato, a Trif (giustamente, dal suo punto di vista intrinseco) è parso che il mondo tornasse quello di prima. Invece è diventato il nodo banale. Vedi la Fig. 12.

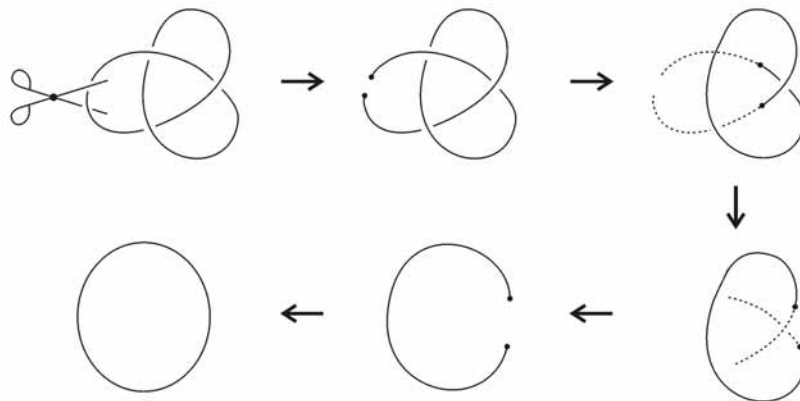


Fig. 12. Tagliando un nodo a trifoglio in un punto, deformando e poi riattaccando, si ottiene il nodo banale, dunque intrinsecamente questi due nodi sono uguali.

I due argomenti che ho descritto si possono ripetere alla lettera per ogni coppia di nodi. Dunque ***dal punto di vista intrinseco, ogni nodo è equivalente al nodo banale***. Ho già annunciato (e spiegato in nota) che invece, ad esempio, dal punto di vista estrinseco (cioè delle deformazioni spaziali) il nodo a trifoglio non è equivalente a quello banale. In realtà si può dire molto di più: ***esistono infiniti nodi estrinsecamente distinti, ovvero due a due non equivalenti tra loro tramite deformazioni***.

Quanto detto a proposito dei nodi si estende per i link: ***due link composti dallo stesso numero di nodi sono sempre intrinsecamente equivalenti, mentre esistono infiniti link estrinsecamente non equivalenti comunque si fissi il numero di componenti nodo***.

Chiralità. Descrivo ora un fenomeno molto interessante, che ha a che fare con l'idea di considerare un nodo dal punto di vista intrinseco. Infatti anche chi non si fosse del tutto persuaso che ogni nodo è intrinsecamente uguale a quello banale, non mi farà obiezioni se dico che guardando un nodo oppure la sua immagine riflessa da uno specchio sto sempre esaminando lo stesso oggetto. *Intrinsecamente lo stesso*. Ma estrinsecamente? Bisogna procedere con calma. Intanto riformulo la domanda in modo più preciso. L'operazione da compiere è quella di mettere un nodo davanti a uno specchio e realizzare un nuovo nodo identico all'immagine riflessa. In termini di diagrammi, se immagino che lo specchio sia parallelo al piano di proiezione, la traduzione dell'operazione è molto semplice: ad ogni incrocio scambio il ramo del nodo che passava sotto con quello che passava sopra. Due esempi sono illustrati in Fig. 13.

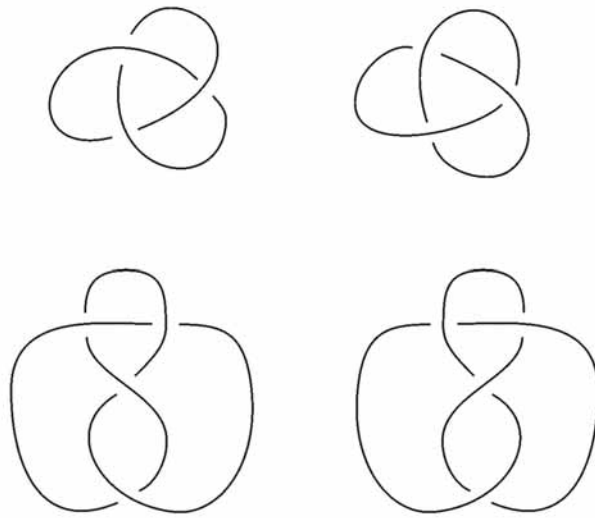


Fig. 13. Nodo trifoglio e nodo a otto insieme alle loro immagini speculari.

La domanda da porsi è ora la seguente: il nodo ottenuto riflettendo è equivalente a quello originale oppure no? Potrà sembrare sorprendente, ma la risposta non è universale: dipende dal nodo. Ad esempio la Fig. 14 mostra che il nodo a otto e la sua immagine riflessa si possono deformare l'uno nell'altro. Invece è possibile (ma non facilissimo) verificare che questo non accade per il nodo a trifoglio, dunque i primi due nodi di Fig. 13 sono effettivamente distinti.

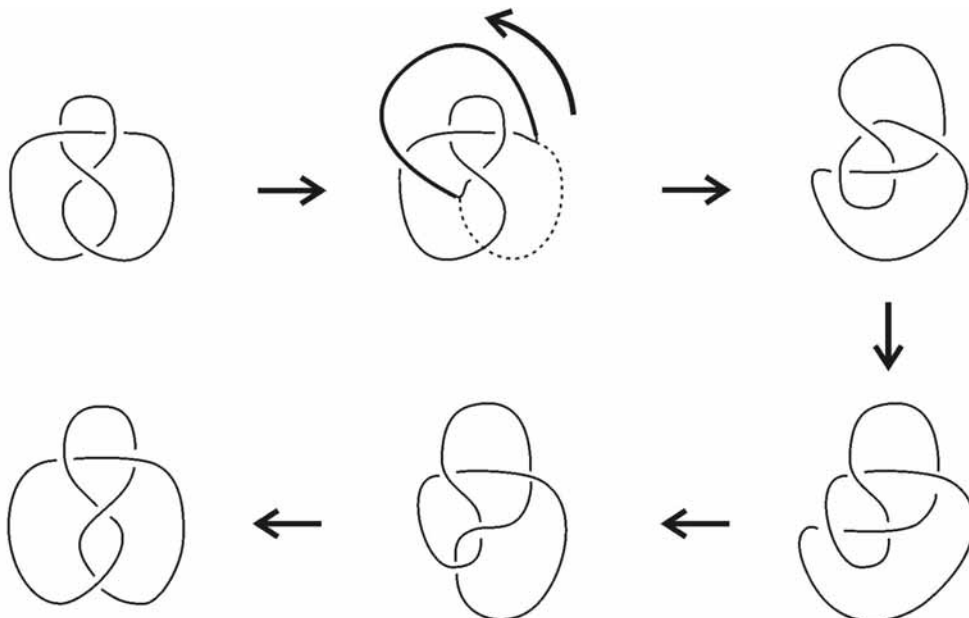


Fig. 14. Achiralità del nodo a otto. La prima mossa eseguita sul diagramma consiste nel ribaltare l'arco tratteggiato su quello in grassetto, la seconda è una rotazione di 180° nel piano di proiezione, le altre sono deformazioni planari.

Per descrivere la situazione i matematici hanno inventato un nome: **si chiama achirale un nodo equivalente alla propria immagine speculare, e chirale uno che non lo è.**

Complementare intrinseco. Finora in questa sezione ho discusso di come si possa guardare a un nodo dal punto di vista intrinseco (ignorando l'esterno) oppure estrinseco (considerando come il nodo giace nello spazio), ma già all'inizio avevo menzionato l'esistenza di un terzo punto di vista: *quello in cui si guarda intrinsecamente l'esterno di un nodo* (il complementare). Qui entro in una topologia un po' più raffinata di quella vista finora, e non dirò nulla che serva anche nel seguito, quindi il resto di questa sezione si può tranquillamente saltare.

Comincio mostrando un fenomeno che potrà sembrare sorprendente. In Fig. 15 mostro due link, entrambi aventi due componenti nodo, dunque intrinsecamente uguali. Invece non è difficile vedere che estrinsecamente sono diversi: nel link a sinistra ciascuna delle due componenti, presa come nodo (cioè ignorando l'altra) è un nodo banale, mentre nel link a destra le due componenti sono un nodo banale e un nodo a trifoglio. È ora possibile verificare (accennerò all'argomento in una nota successiva) che i complementari dei due link sono intrinsecamente uguali.

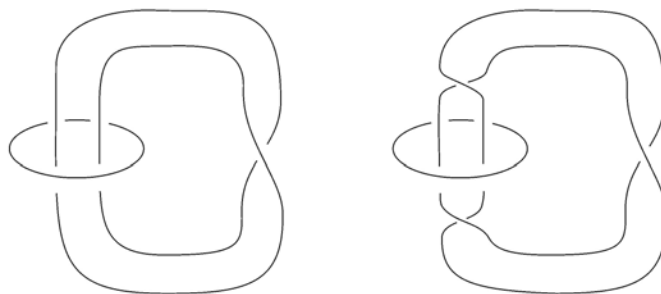


Fig. 15. Due link distinti con complementari uguali.

L'esempio appena discusso mostra che ***link non equivalenti possono avere complementari intrinsecamente uguali.*** Con questo in mente si potrà apprezzare il seguente risultato di eccezionale difficoltà, che ha richiesto ai matematici decenni di sforzi: ***se due nodi hanno complementari intrinsecamente uguali allora sono equivalenti per deformazione.***

Superfici e orientabilità

Introduco ora un nuovo tipo di oggetto di cui la topologia si interessa. Per farlo torno alla definizione stessa di nodo, spiegando come se ne possa dare una versione intrinseca. Infatti dicendo che un nodo è una corda ingarbugliata di spessore nullo indubbiamente sto pensando di vedere il nodo dall'esterno. Ma se invece adotto il punto di vista di Ban e Trif, posso dire che **un nodo è un mondo un abitante¹⁸ del quale ritiene di vivere su un filo, cioè uno in cui egli può guardare solo avanti e indietro.**

¹⁸ Dotato di vista corta, cioè capace di vedere solo una piccola porzione di mondo, quella vicina a dove lui è posto.

A questo punto posso definire **una superficie**: è un mondo un abitante del quale ritiene di vivere al centro di un foglio di carta; può guardare avanti, a sinistra, dietro, a destra e in tutte le direzioni intermedie, ma non in alto e in basso. Alcuni esempi¹⁹ di superfici sono mostrati in Fig. 16.

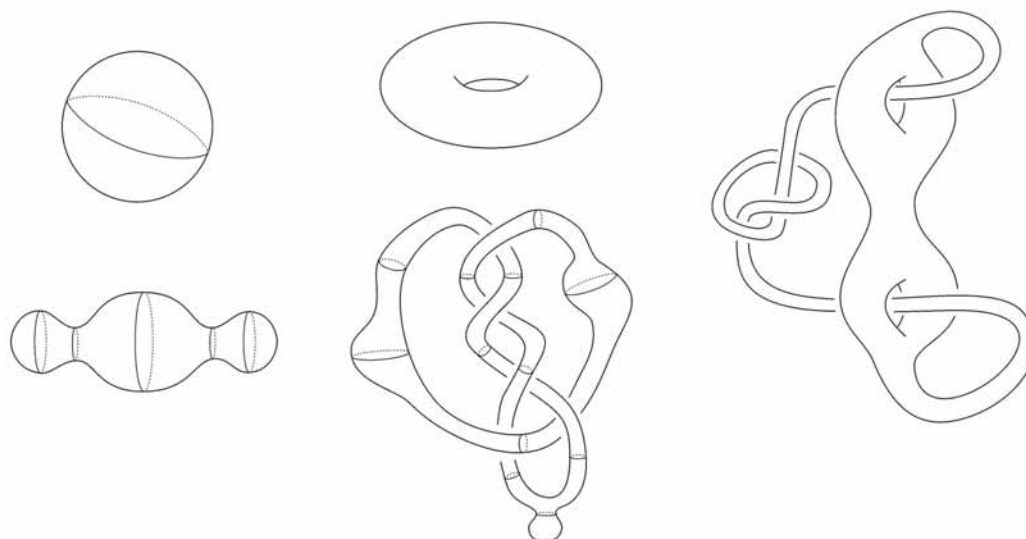


Fig. 16. Alcune superfici (senza bordo).

Più che quella appena data, per la teoria dei nodi conta una variante della definizione di superficie, quella di **superficie con bordo**: è un mondo un abitante del quale ritiene di vivere al centro di un foglio di carta oppure su un lato di esso; ci sono posizioni dalle quali può guardare avanti, a sinistra, dietro, a destra e in tutte le direzioni intermedie, altre in cui può guardare avanti, a sinistra, dietro e in tutte le direzioni intermedie (ma non a destra). Alcuni esempi sono in Fig. 17.

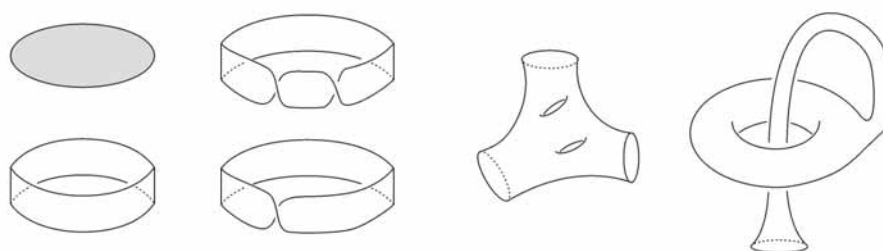


Fig. 17. Alcune superfici con bordo.

¹⁹ La prima superficie in Fig. 16 si chiama *sfera*, ed è ben noto che è questa (approssimativamente) la forma della superficie terrestre. E posso meglio comprendere il punto di vista di Ban e Trif, che sostengono di vivere in un filo, se mi immedesimo in un mio simile di epoca precolombiana. Infatti ritenere che la terra sia piatta (tranne che per le asperità del terreno) significa precisamente descriverla come un mondo che esaminato con vista corta sembra un foglio di carta.

Il bordo di una superficie è costituito dalle posizioni nelle quali la visuale è più limitata. In base alla definizione data, è evidente che *il bordo di una superficie è un insieme di nodi, cioè un link*.

Topologia estrinseca e intrinseca di una superficie. Come per i nodi, anche per le superfici posso scegliere di considerarne due equivalenti se sono deformabili l'una nell'altra, come accade per quelle a sinistra in Fig. 16 (e per i palloncini di Fig. 1). Questo è il punto di vista estrinseco, ma posso anche adottare quello opposto, tornando ancora una volta ai nodi per introdurre l'idea. A Ban e Trif, per descrivere completamente i loro mondi, non è bastato dire che in ogni punto potevano solo andare avanti e indietro: hanno dovuto compiere un'esplorazione completa. E lo stesso si applica al caso in esame: due superfici sono intrinsecamente uguali se un abitante dell'una e uno dell'altra possono percorrerle per intero, tenendosi in contatto radio e verificando che in ogni momento le loro osservazioni²⁰ siano le stesse. La formalizzazione matematica di questa idea richiede nozioni tecniche che non voglio usare in questa sede. Ma userò questo fatto intuitivo: se taglio una superficie, poi la deformato e alla fine riattacco esattamente come avevo tagliato, la superficie che trovo alla fine è intrinsecamente uguale a quella che avevo all'inizio.

Come primo esempio, taglio la superficie di Fig. 16 in basso al centro. Lo faccio all'inizio di Fig. 18, ma devo fare attenzione: per ricordarmi come dovrò poi riattaccare, devo annotare qualche informazione²¹. A questo fine metto sulle due circonferenze create dal taglio un punto e una freccia, per rammentare che riattaccherò a partire dal punto e seguendo la freccia. Quindi deformato e appunto riattacco, come in Fig. 18. In definitiva, ho scoperto che le due superfici in basso e in alto al centro in Fig. 16 sono intrinsecamente uguali²².

²⁰ Del tipo: "da qui ero già passato, camminando in direzione sinistra-destra rispetto a quella attuale". Oppure: "sono arrivato al bordo, non posso procedere avanti, giro a sinistra". E simili.

²¹ Nel caso dei nodi si taglia in un punto, dunque poi si deve incollare un punto a un altro, e c'è un solo modo per farlo. Ma ora tagliando la superficie creo due circonferenze di bordo, e per incollare queste avrei molti modi.

²² Estrinsecamente sono diverse, ma vederlo non è affatto immediato. Si chiamano (entrambe, visto che sono intrinsecamente uguali) *toro*.

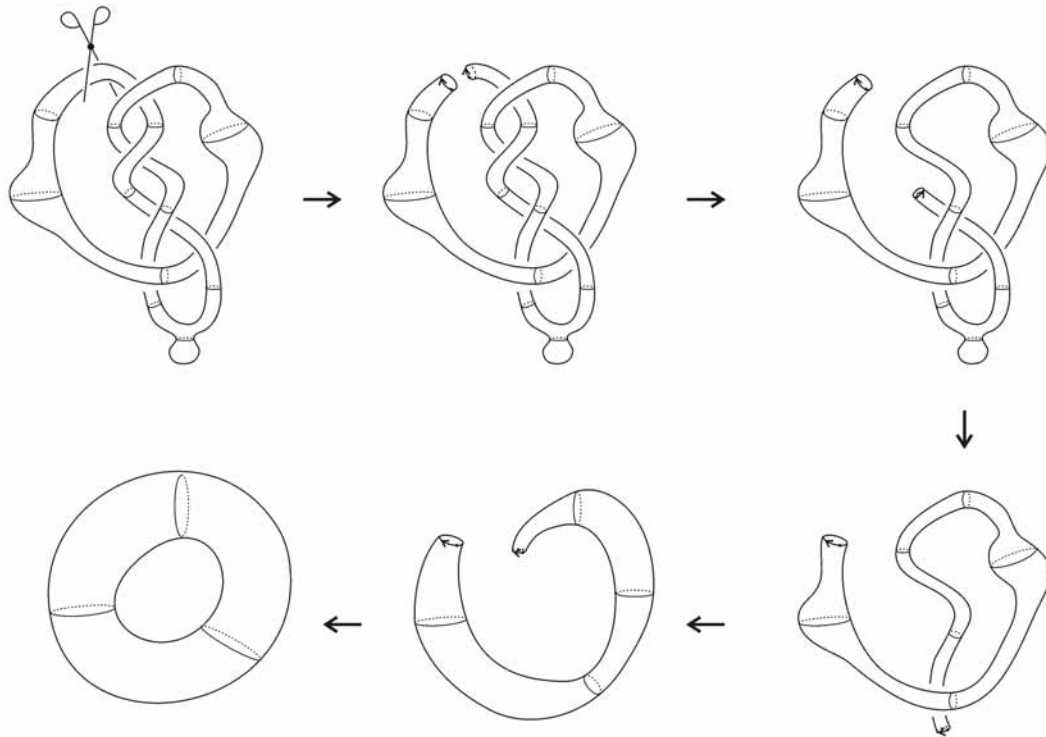


Fig. 18. Superfici senza bordo intrinsecamente uguali.

Ora passo alle superfici con bordo, mostrando²³ in Fig. 19 come due di quelle fatte a nastro siano tra loro intrinsecamente uguali.

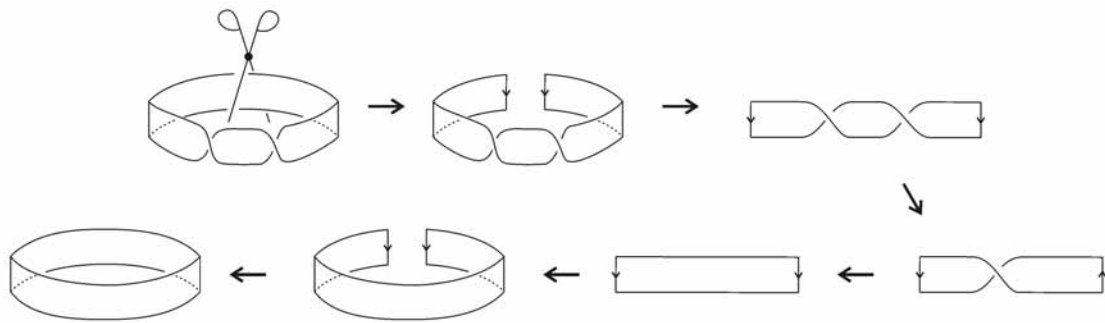


Fig. 19. Superfici con bordo intrinsecamente uguali.

Si tratta del nastro al quale non viene data alcuna torsione (che chiamerò *cilindro*²⁴) e quello cui ne vengono date due. E cosa succede per il nastro con una sola torsione? È intrinsecamente uguale agli altri due? La risposta è in realtà molto semplice: non può essere uguale, perché il suo bordo è un singolo nodo, mentre per gli altri nastri è un link

²³ In questo caso taglio lungo un segmento, dunque per ricordare come incollare alla fine mi basta una freccia. Di nuovo le superfici sono estrinsecamente diverse, e verificarlo non è difficile.

²⁴ I topologi chiamano *cilindro* la sola “superficie laterale” di quello che a scuola si chiama cilindro.

con due componenti nodo. Ciononostante in Fig. 20 taglio anche questa superficie, che si chiama nastro di Moebius, per illustrare come essa si costruisca²⁵.

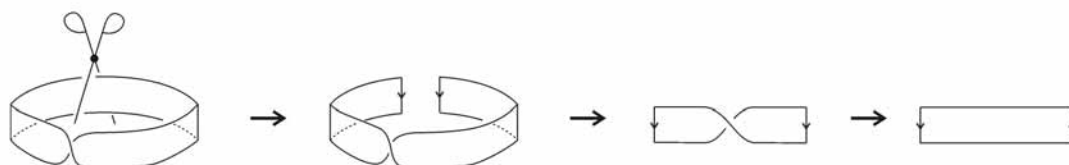


Fig. 20. Il nastro di Moebius si ottiene incollando tra loro, dopo una torsione, le estremità di una strisciolina di carta.

Dall'esame delle Fig. 19 e 20 discende questo fatto, che userò: *ci sono solo due modi di incollare tra loro i lati estremi di una striscia rettangolare di carta; la superficie risultante, dal punto di vista intrinseco²⁶, è nei due casi il cilindro oppure il nastro di Moebius.*

Orientabilità. Cerco ora di dare un po' di colore alle grigie superfici di cui ho parlato finora. Due colori, precisamente. Mi attrezzo con un barattolo di vernice rossa e uno di vernice blu, e due pennelli. Quindi comincio a dipingere di rosso un lato del nastro senza torsioni. L'operazione è illustrata nella parte superiore di Fig. 21. Alla sua conclusione l'altro lato del nastro è rimasto privo di colore, quindi posso colorarlo di blu, come nella parte inferiore della stessa figura.

²⁵ Chi legge è invitato a munirsi di carta, forbici e nastro adesivo e provare davvero, seguendo a ritroso i passaggi di Fig. 20.

²⁶ Dal punto di vista estrinseco le possibilità sono invece infinite, come spiegherò parlando di riferimenti per nodi.

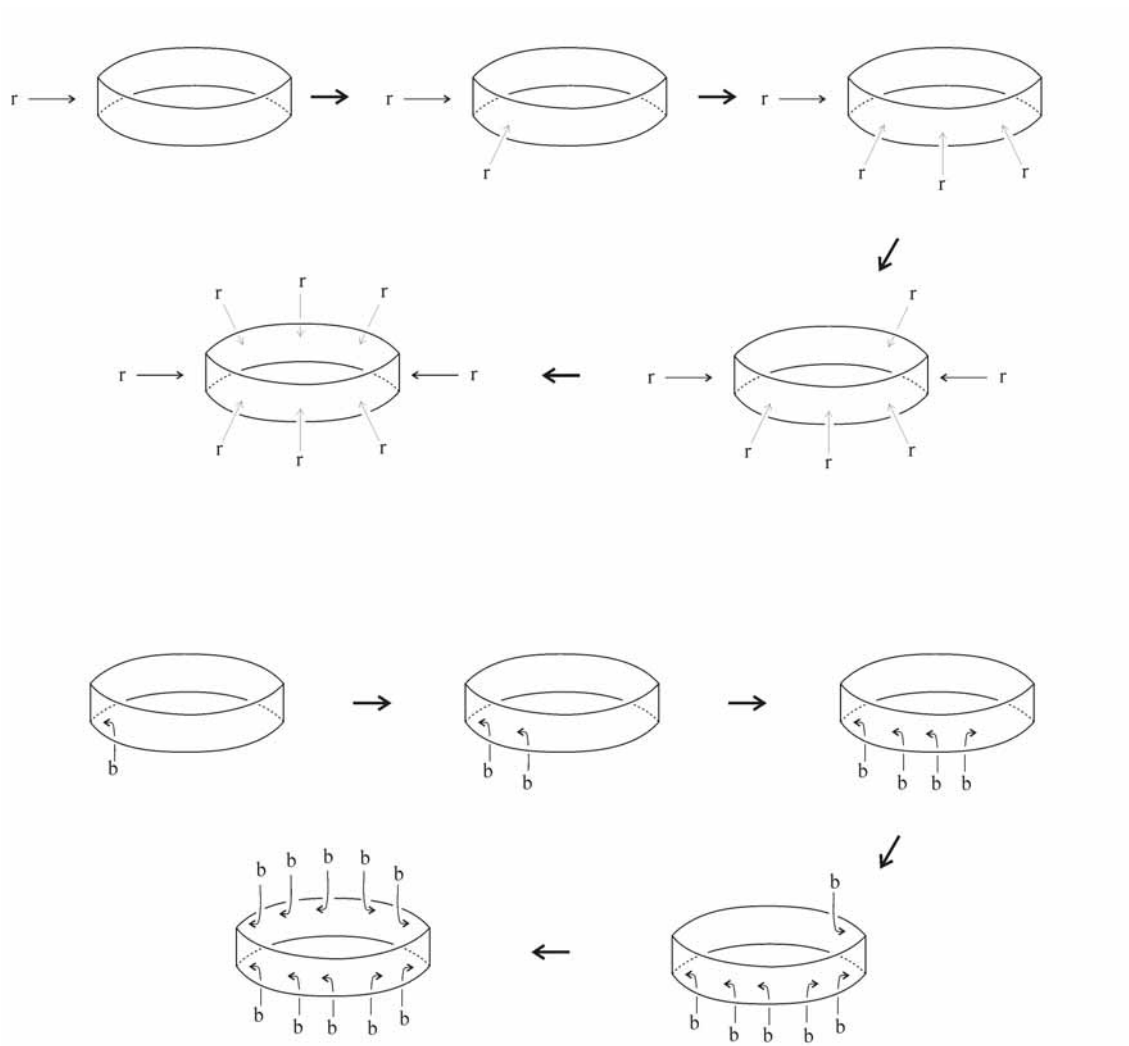


Fig. 21. I due lati di un nastro senza torsione si possono colorare di due colori diversi.

Ora provo a fare la stessa cosa con il nastro di Moebius, come si vede in Fig. 22. Da questa figura appare evidente che se comincio a pitturare di rosso il nastro di Moebius in un punto, quindi continuo a dipingere senza staccare il pennello dalla superficie, inevitabilmente finisco per dare lo stesso colore anche sul lato opposto rispetto al punto da cui ho iniziato. Quindi in definitiva se inizio a colorare di rosso il nastro di Moebius e continuo finchè, senza staccare il pennello, trovo parti non dipinte, non ho scampo: lo coloro di rosso per intero!

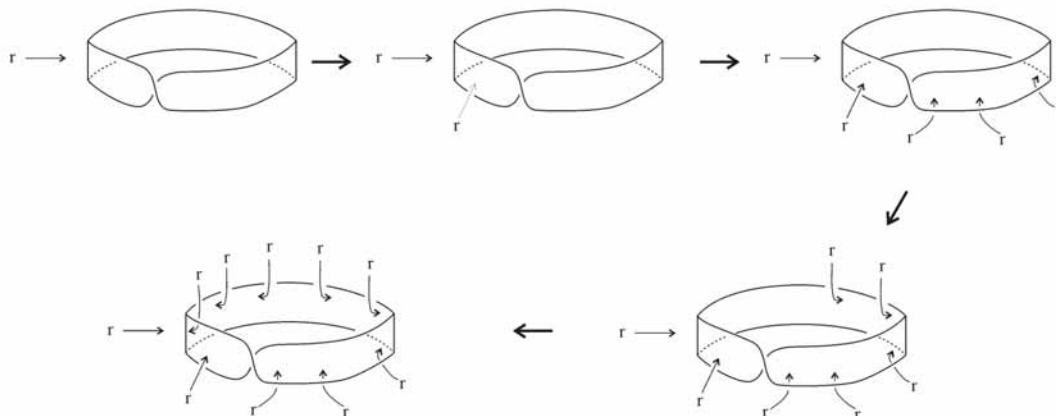


Fig. 22. Un nastro di Moebius non si può colorare con due colori diversi.

Riassumo la scoperta in una definizione: **si chiamano orientabili le superfici di cui è possibile colorare i due lati opposti²⁷ con due colori diversi**. Le altre superfici (e ce ne sono!) si chiamano non orientabili; ne mostro un altro esempio in Fig. 23.

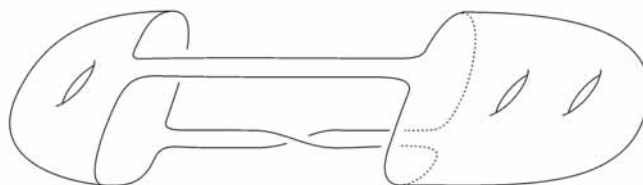


Fig. 23. Una superficie non orientabile.

Riferimenti, superfici knot-spanning e superfici di Seifert

Questa sezione è dedicata ad alcune nozioni che combinano la teoria dei nodi con quella delle superfici. Come sempre in precedenza, mi limiterò a dare definizioni e spiegazioni informali e intuitive, evitandone la formalizzazione tecnica.

Introduco la nozione di riferimento²⁸ tornando agli amici Ban e Trif, gli abitanti dei nodi. Come già detto, se il loro orizzonte è limitato al nodo stesso, essi non possiedono nozione che di una sola direzione, quella avanti-indietro. Immagino però ora di consentire a uno di loro, pur senza lasciarlo uscire dal nodo, di guardarsi intorno²⁹ nello spazio. Se ora gli chiedo in quale direzione vede qualche oggetto che sta volando al di fuori dal nodo, mi accorgo dal suo silenzio che il meschino non sa rispondere! Infatti per lui, che sa solo cosa è avanti e cosa è indietro lungo il nodo, non hanno senso le nozioni di destra/sinistra o sopra/sotto. Scegliere un riferimento significa precisamente togliere l'amico da questa incresciosa situazione, ovvero insegnargli qual è la direzione

²⁷ In realtà dicendo che hanno due lati opposti sto già dando l'informazione importante: i colori hanno una funzione puramente estetica. Per questa ragione le superfici non orientabili sono anche dette *monolateri*.

²⁸ *Framing*, in inglese.

²⁹ Ma non troppo lontano, come nella definizione intrinseca di nodo e superficie.

a destra rispetto a lui³⁰. Ma per eccedere nella magnanimità³¹, invece che semplicemente insegnargli qual è la sua destra, gli regalo proprio un pezzetto di mondo che stia alla sua destra e lungo cui (volendo) egli possa spostarsi: una superficie.

Precisando³² quanto detto finora, passo dunque a una definizione. **Un riferimento lungo un nodo è la scelta di una sottile striscia di carta che si appoggi al nodo.** Se esamino una piccola porzione di nodo, l'operazione elementare che devo fare è quella descritta nella parte sinistra di Fig. 24 (qui e nel seguito, un tratto grafico più spesso servirà a distinguere il nodo da cui sono partito da altre linee che compaiono nella figura).

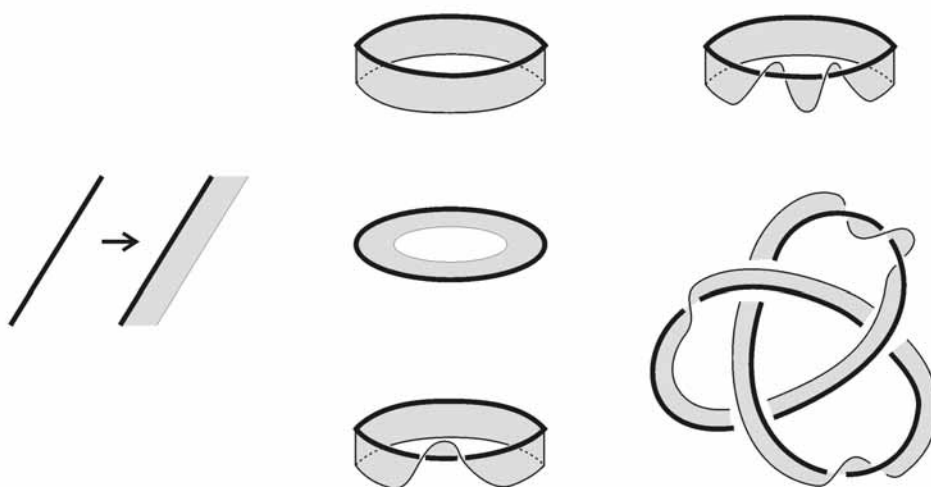


Fig. 24. Significato della scelta di un riferimento su una porzione di nodo, e alcuni esempi di riferimenti (quattro per il nodo banale e uno per il trifoglio).

Tenendo a mente quanto detto sopra sui nastri, vale la pena di osservare che *dal punto di vista intrinseco un riferimento è sempre un cilindro*³³, dunque una superficie orientabile. Infatti il suo bordo è costituito dal nodo col quale sono partito e da un altro³⁴. Siccome un riferimento non è altro che una superficie, è naturale che io consideri “uguali” due riferimenti quando, come superfici, si possono deformare l’uno

³⁰ Visto che la direzione avanti/indietro si sa già, sapendo dov'è la destra le direzioni si sanno tutte: la sinistra è opposta alla destra, il sotto è dove stanno i piedi se si guarda avanti messi in modo che il cuore stia nella metà del corpo in direzione sinistra, e il sopra è opposto al sotto.

³¹ E aggirare qualche difficoltà matematica.

³² Si fa per dire!

³³ Siccome è chiaro che lungo ogni nodo è possibile scegliere riferimenti e che due riferimenti lungo nodi non equivalenti sono sempre estrinsecamente diversi, da questo segue che ci sono infiniti cilindri estrinsecamente diversi nello spazio. Vedere la stessa cosa per i nastri di Moebius non è affatto difficile.

³⁴ Parallelo a quello originale, intendendo il termine “parallelo” nel modo flessibile tipico dei topologi.

nell'altro. Ad esempio sono uguali tra loro i tre riferimenti³⁵ lungo il nodo banale mostrati nella parte centrale di Fig. 24.

Nodi come bordi di superfici. Assegnato un nodo, chiamerò *knot-spanning*³⁶ una superficie il cui bordo sia costituito unicamente da tale nodo. Alcuni esempi³⁷ sono mostrati³⁸ in Fig. 25.

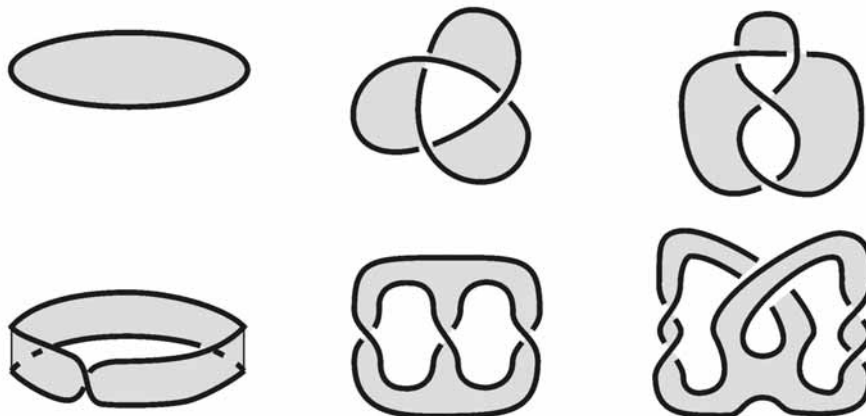


Fig. 25. Due superfici knot-spanning per il nodo banale, due per il nodo a trifoglio e due per il nodo a otto.

Chiamerò **di Seifert per un nodo una superficie che sia knot-spanning e orientabile.**

Riferimenti determinati da superfici. Se ho un nodo e per esso una superficie knot-spanning (sia essa di Seifert, cioè orientabile, o meno), posso costruire un riferimento sul nodo semplicemente prendendo la porzione di superficie più vicina al nodo (cioè

³⁵ Invece l'ultimo è diverso da loro, anche se non è del tutto immediato spiegare perché.

³⁶ L'espressione inglese è intraducibile in italiano, se non a costo di una lunga perifrasi.

³⁷ Chi legge è invitato a convincersi che i nodi che delimitano le superfici nella parte inferiore di Fig. 25 sono quello banale, il trifoglio e quello a otto. La prima verifica è facile, le altre meno.

³⁸ Il primo nodo banale di Fig. 25 è una circonferenza contenuta in un piano orizzontale, e la superficie knot-spanning per esso mostrata è la più semplice e naturale possibile: un cerchio nello stesso piano. Impiegando questa figura posso ora accennare alla spiegazione del fatto che i due link di Fig. 15 hanno complementari intrinsecamente uguali. Considero per il link di sinistra il cerchio orizzontale (inteso come superficie) che ha come bordo il nodo banale "piccolo" (e che viene attraversato in due punti dal nodo banale "grande"). Quindi taglio il complementare del link lungo questo cerchio. È lo stesso tipo di taglio delle Fig. 12 e 18-20, solo che la dimensione è salita: in Fig. 12 tagliavo un oggetto di dimensione 1 (un nodo) lungo uno di dimensione 0 (un punto), nelle 18-20 tagliavo un oggetto di dimensione 2 (una superficie) lungo uno di dimensione 1 (una circonferenza o un segmento), mentre qui taglio un oggetto di dimensione 3 (il complementare del link) lungo uno di dimensione 2 (il cerchio). Dopo avere fatto questo taglio posso operare un po' come Dio nella Fig. 12, rigirandomi tra le mani il complementare del link. Nella fattispecie noto che dopo il taglio ho un oggetto che contiene due cerchi sul bordo, ruoto uno di questi due di 360° riportandolo dunque nella posizione iniziale, e torno a incollare. Siccome incollando ho precisamente rimediato al taglio precedente, lo spazio complementare resta lo stesso, ma il link è diventato quello della parte destra della figura. Noto che l'operazione di rotazione del cerchio ha senso perché il link contiene il bordo del cerchio, altrimenti la rotazione provocherebbe una lacerazione dello spazio lungo tale nodo.

una strisciolina che si appoggia al nodo, ed è contenuta nella mia superficie). Tre esempi sono illustrati in Fig. 26.

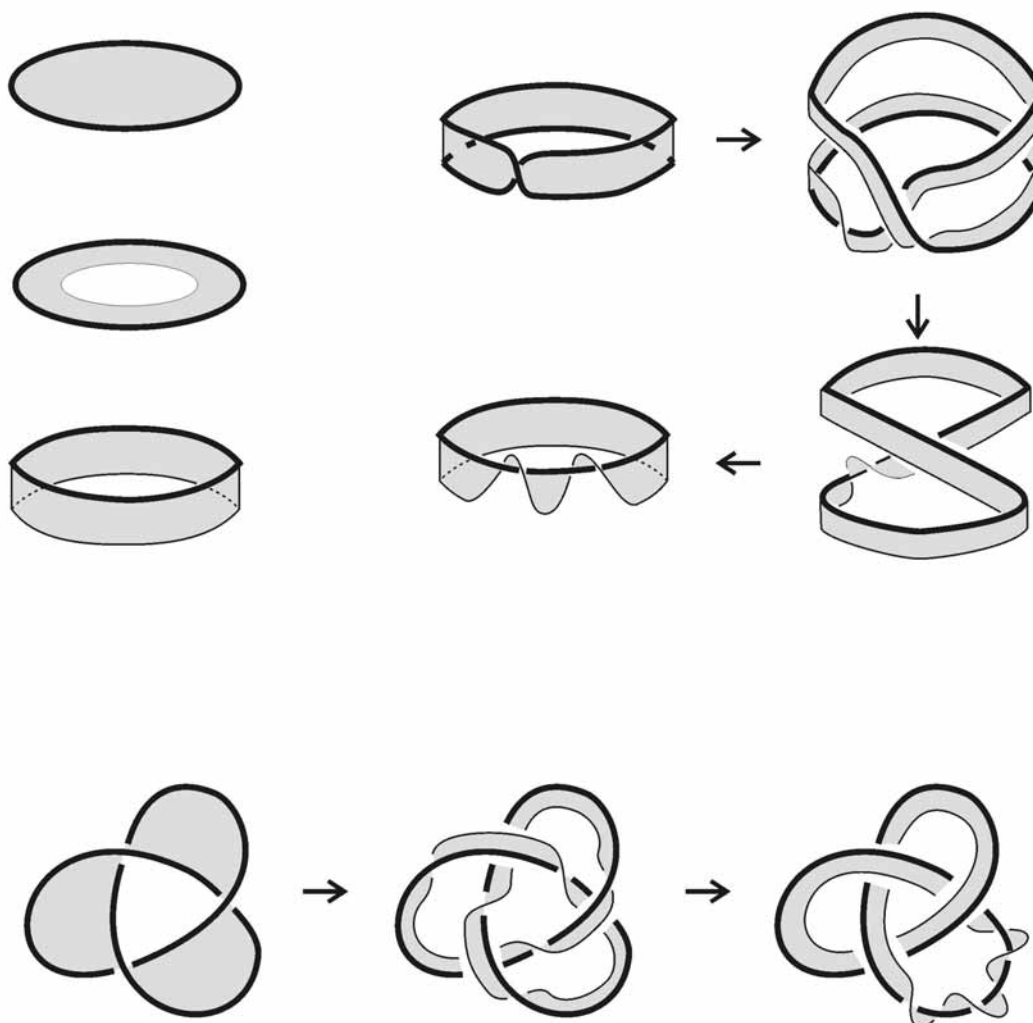


Fig. 26. Riferimenti determinati da superfici knot-spanning.

Come ho detto in precedenza, e mostrato con figure, per ogni nodo ci sono infinite superfici knot-spanning, sia di Seifert che non orientabili. Vale però il fatto seguente: *tutte le infinite superfici di Seifert³⁹ per un fissato nodo, determinano su di esso il medesimo⁴⁰ riferimento⁴¹*, che dunque può essere chiamato “riferimento caratteristico” del nodo.

Il caso dei link. Non è per caso che finora, parlando di riferimenti e superfici che si appoggiano a nodi, io non abbia considerato il caso dei link, cioè dei nodi a più componenti. Infatti, se pure è vero che la nozione di riferimento⁴² e quella di superficie

³⁹ Il risultato non è più vero se si includono superfici knot-spanning non orientabili.

⁴⁰ A meno di deformazione, naturalmente.

⁴¹ La verifica di questo fatto non è per nulla elementare.

⁴² Un riferimento per un link è un riferimento per ciascuna delle componenti nodo del link.

di Seifert⁴³ si estendono alla lettera a questo caso, non altrettanto vale per la principale conclusione menzionata sopra. Senza fornire esempi (che pure sarebbero molto semplici), enuncio quanto segue:

- Se un nodo è una componente di un link, una superficie di Seifert per il link può non definire sul nodo il riferimento caratteristico del nodo.
- Per un link, superfici di Seifert diverse possono definire riferimenti diversi.

⁴³ Una superficie di Seifert per un link è una superficie orientabile di cui il link sia l'intero bordo.