Poliedri uniformi

Quanti e quali sono i poliedri regolari? Quanti e quali quelli uniformi?

Poliedri uniformi e no

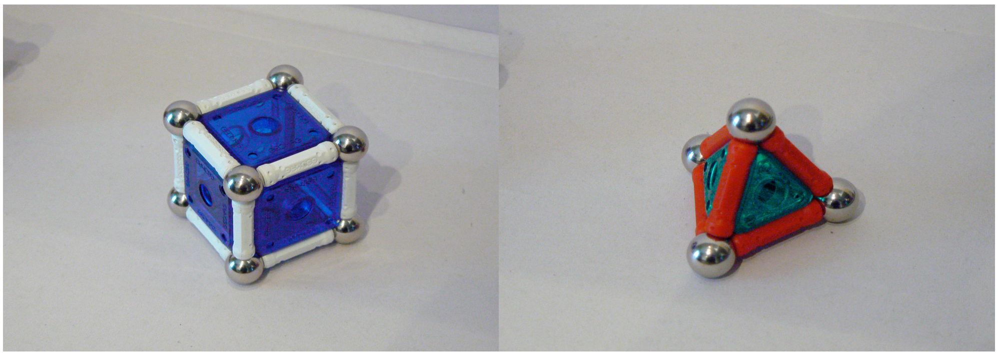
Ricercatore: Alessandro Cattaneo
Referente: Maria Grazia Bernasconi
Istituto: Liceo scientifico Italo Calvino, Noverasco
Anno scolastico: 2009-2010
Membri del gruppo: Marco Galli, Claudia Bozzini, Valeria Bonini, Eleonora Cocconi, Lorenzo Dacorsi, Riccardo Pozzi, Luca Gallarini, Alessandro Celant, Fabio Costa, Andrea Riva, Daniele Curti, Marco Piras, Nicola Morretta, Andrea Perna, Niccolò Benzoni, Lorenzo Cipolla, Luca Panzan, Arianna Pece, Giovanni De Amici (classi 3E-4E)

Per il progetto di *MATh.en JEANS* ci è stato richiesto di lavorare sui poliedri uniformi, cercando di classificarli.
Fin dall'inizio abbiamo deciso di lavorare solo con poliedri convessi. Un poliedro è un solido formato da quattro o più facce che corrispondono a poligoni giacenti su piani diversi e disposti in modo che ogni lato sia comune a due poligoni.
Il lavoro svolto si divide principalmente in due fasi, nelle quali abbiamo all'incirca proceduto nello stesso modo.
Nella prima fase, ricercando quali e quanti erano per noi i poliedri più "belli", con un concetto di "bello" molto vicino a quello di regolare, abbiamo stabilito che essi dovevano rispettare le seguenti caratteristiche:

1. Essere formati da facce regolari
2. Essere formati da facce tutte uguali
3. Possedere le figure al vertice tutte uguali
4. Possedere le figure al vertice regolari.

Determinate le caratteristiche necessarie, abbiamo trovato quanti e quali sono i poliedri regolari.
È possibile dividere il procedimento che abbiamo utilizzato per trovare questi solidi in tre brevi fasi:

1. Classificazione dei poliedri in base alle caratteristiche
2. Utilizzo delle calamite Geomag per la costruzione dei poliedri
3. Studio dei poliedri costruiti.



Siamo giunti alla conclusione che è impossibile costruire un poliedro regolare utilizzando come facce poligoni regolari aventi più di cinque lati, poiché la somma delle ampiezze degli angoli che convergono nello stesso vertice deve essere minore di 360°. In ogni vertice possono convergere quindi tre, quattro o cinque poligoni in cui la somma delle ampiezze degli angoli interni deve essere minore di 360°, poiché se fosse uguale si avrebbe un unico piano e se fosse maggiore non si verrebbe mai a creare un poliedro convesso; l'ampiezza di ogni angolo del poligono deve essere, dunque, minore di 120° e poiché l''ultimo' poligono regolare con un angolo avente queste caratteristiche è il pentagono regolare, il cui angolo misura 108°, possiamo trovare solidi regolari formati da poligoni quali triangolo equilatero, quadrato e pentagono regolare. Nel caso in cui a formare un vertice concorrano quattro o cinque poligoni, l'ampiezza di ciascun angolo deve essere necessariamente di 60° e perciò devono convergere in un vertice dei triangoli equilateri.
Mentre i poligoni regolari sul piano sono infiniti, i poliedri regolari nello spazio sono finiti e sono precisamente cinque.
I cinque poliedri regolari sono:
tetraedro: quattro triangoli equilateri, sequenza in ogni vertice di tre triangoli equilateri: 3, 3, 3
cubo o esaedro: sei quadrati, tre in ogni vertice, sequenza 4, 4, 4
ottaedro: otto triangoli equilateri, quattro in ogni vertice, sequenza 3, 3, 3, 3
dodecaedro: dodici pentagoni regolari, tre in ogni vertice, sequenza 5, 5, 5
icosaedro: venti triangoli equilateri, cinque in ogni vertice, sequenza 3, 3, 3, 3, 3.

Trovata la ragione che limita la costruzione dei poliedri regolari, siamo passati alla fase due, infatti ci è stato chiesto di ridurre le quattro caratteristiche date precedentemente a due:

1. Poligoni formati da facce regolari
2. Poligoni aventi le figure al vertice tutte uguali.

Abbiamo scelto queste due perché più semplice lavorare con figure regolari e con le stesse figure al vertice (avere le stesse figure al vertice per tutto il poliedro implica che anche tutti gli angoloidi siano uguali).

A questo punto però siamo giunti ad avere un numero infinito di poliedri di un certo tipo e solo tredici di un altro, poiché la condizione necessaria e fondamentale rimane l'ampiezza della somma degli angoli dei poligoni che convergono nello stesso vertice che deve necessariamente essere minore di 360°.
In questa fase di lavoro abbiamo seguito due passaggi:

1. Lo studio teorico dei solidi attraverso sequenze numeriche a cui è possibile associare poliedri uniformi (un numero corrispondi al poligono regolare con quel dato numero di lati).

2. La costruzione pratica, sempre utilizzando le calamite Geomag, delle sequenze trovate e ritenute accettabili.

Studiando le sequenze abbiamo subito trovato due tipi che producono infiniti poliedri con le caratteristiche richieste:

- 4, 4, n (dove $n \neq 0;1;2$): un prisma formato da una corona di n quadrati come superficie laterale e avente come basi due poligoni regolari con n lati.
- 3, 3, 3, n (sempre dove $n \neq 0;1;2$) un poliedro formato da una corona di triangoli equilateri (uno con vertice in alto, l'altro con vertice in basso) come superficie laterale e avente come basi due poligoni regolari con n lati.

Eliminati questi due tipi di poliedri, i solidi che rispettano le caratteristiche 1. e 2. sono tredici.

Come detto in precedenza, in ogni vertice del poliedro possono giungere tre, quattro o cinque figure.
Siamo partiti analizzando i poliedri ai cui vertici convergono tre figure e abbiamo trovato i solidi rappresentati dalle seguenti sequenze:

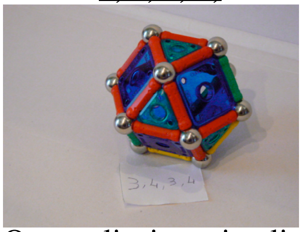
- **3, 6, 6;** tetraedro troncato
- **3, 8, 8;** cubo troncato
- **3, 10, 10;** dodecaedro troncato
- **5, 6, 6;** icosaedro troncato (pallone da calcio)
- **4, 6, 6;** ottaedro troncato
- **4, 6, 8;**
- **4, 6, 10;**

Abbiamo osservato che se in una terna di numeri uno di essi è dispari allora è necessario che gli altri due numeri siano uguali tra loro e pari affinché in ogni vertice convergano le stesse figure e si formino angoloidi uguali.
Se le tre figure che convergono nello stesso vertice hanno un numero pari di lati, queste devono rispettare sempre la condizione della somma delle ampiezze degli angoli che convergono in uno stesso vertice minore di 360° e per questo in ognuno di essi deve convergere almeno un quadrato perché altrimenti la minore somma di angoli possibile sarebbe 360° con la sequenza 6, 6, 6 (120° + 120° + 120°) e non sarebbe accettabile.

Abbiamo poi analizzato i poliedri ai cui vertici convergono quattro figure.
In ogni sequenza deve comparire almeno un numero '3', sempre per rispettare la somma massima degli angoli, dei poligoni associati numeri, che convergono in uno stesso vertice; inoltre per la stessa ragione di prima, anche qui ogni poligono avente numero di lati dispari deve essere affiancato da poligoni uguali.

Date le precedenti condizioni, le sequenze accettabili sono:

- **3, 5, 3, 5;**
- **3, 4, 5, 4;**
- **3, 4, 4, 4;** riguardo questa sequenza è necessario dire che in realtà dà origine a due poliedri
- **3, 4, 3, 4;**



Ora analizziamo i poliedri ai cui vertici convergono cinque figure.
Sempre per lo stesso motivo sulla somma degli angoli è necessario che siano presenti almeno quattro figure da tre lati poiché con la presenza di soli due quadrati e tre triangoli il vertice che si forma è di 360° (60° + 60° + 60° + 90° + 90° = 360°).
Fissate quindi le condizioni, le figure accettabili sono:

- **3, 3, 3, 3, 5;**
- **3, 3, 3, 3, 4;**

di entrambe sono accettabili due costruzioni

In conclusione i poliedri trovati che rispettano le prime quattro caratteristiche sono cinque e sono definiti solidi platonici, mentre i poliedri che seguono solo le due caratteristiche, poliedri formati da facce regolari e aventi le figure al vertice tutte uguali, sono tredici se escludiamo le due sequenze infinite dei prismi e antiprismi.
Lavorare a questo progetto è stato davvero interessante soprattutto perché ci ha permesso di ragionare autonomamente ed in un nuovo modo, permettendoci cosi di giungere a nuove conoscenze necessarie sia per il completamento del progetto, sia per gli studi futuri.