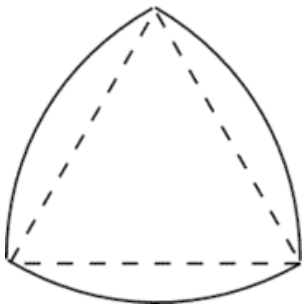
# I poligoni di Reuleaux

*Studiare le proprietà del triangolo di Reuleaux e spiegare in che modo questo può essere usato per creare buchi quadrati. A quali altri poligoni si può applicare la costruzione di Reuleaux? Quali sono le proprietà di queste figure?*


ISTITUTO ISTRUZIONE SUPERIORE ITALO CALVINO, ROZZANO
ANNO SCOLASTICO 2009/2010
LICEO SCIENTIFICO: CLASSI 3A, 3C, 4C
AUTORI: SIMONE ALTAMORE, MATTEO DE PASCALE, FEDERICA MIGLIETTA, VANIA MILAN, LORENZO PEDRON, NICCOLO REFRIGERI, ALOISIA SCIPIONE, SIMONE SCOTTI
DOCENTI: MARIA ROSARIA GUERRA, MARIA STEFANIA STRATI
RICERCATORE: DOTT. ANDREA MONTOLI


## A
## IL PROBLEMA

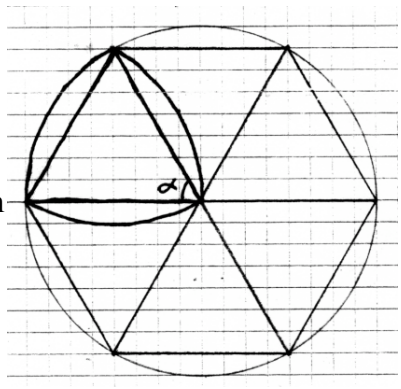


Il nostro punto di partenza è dato da un triangolo curvilineo, ottenuto a partire da un triangolo equilatero di lato $l$, puntando il compasso in ciascuno dei vertici con ampiezza pari al lato e realizzando l'arco di circonferenza sul lato opposto.

## B

Il problema proposto consisteva nel capire quali proprietà avesse questa figura e in particolare come potesse creare dei buchi quadrati.

## STUDIO DELLA FIGURA

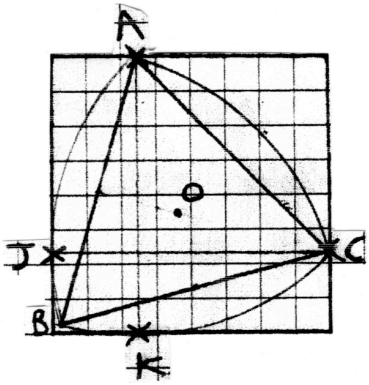



Siamo partiti dallo studio delle proprietà della figura, cominciando a valutarne il perimetro e l'area.
Il perimetro del triangolo curvilineo è stato trovato grazie alla costruzione mostrata nella figura qui a fianco ottenuta osservando che l'angolo $\alpha$ è di 60°, essendo il triangolo equilatero, ed è quindi 1/6 di angolo giro. Si può così tracciare l'esagono di lato $l$ inscritto in una circonferenza di raggio $l$.
Il perimetro del triangolo curvilineo corrisponde pertanto a metà circonferenza di raggio $l$, ovvero a $\pi l$.

$P = \pi l$

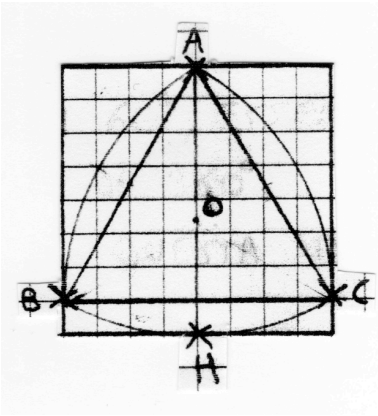
L'area della figura si può trovare sommando l'area del triangolo equilatero di lato $l$ con l'area dei tre segmenti circolari: $A_{tr.eq.} + 3(1/6\, A_{cerchio} - A_{tr.eq.})$
Svolgendo i calcoli si ottiene $A_{tr.m.} = l^2\,(\pi-\sqrt{3})/2$ , cioè $A_{tr.m.} \approx 0.7\, l^2$

$A$=0.7 $l^2$

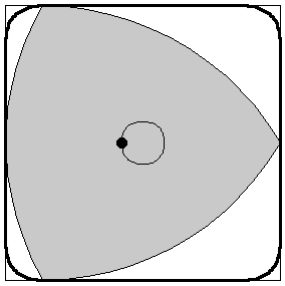



BUCHI QUADRATI

Abbiamo proseguito cercando di capire quali rotazioni fossero necessarie affinché il triangolo curvilineo desse origine a un quadrato. Provando a inserire la figura in un quadrato di lato $l$, ci siamo accorti che l'intersezione tra il triangolo curvilineo e il quadrato è costituita da quattro punti, dei quali due o tre sono vertici del triangolo.

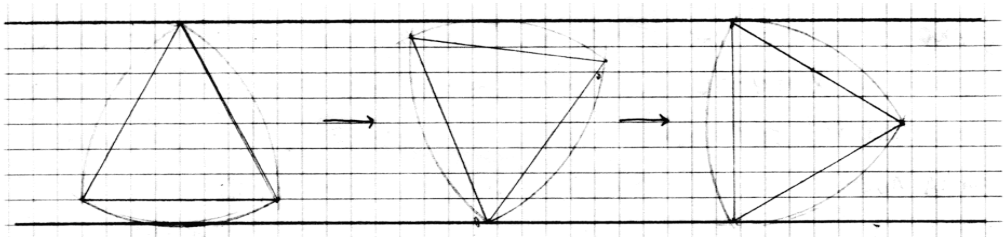



Inizialmente abbiamo pensato che per formare un quadrato, il triangolo dovesse girare attorno al proprio centro, ma così facendo abbiamo ottenuto solo una circonferenza.
La soluzione finale, infatti, implica una doppia rotazione; non solo il triangolo deve ruotare attorno al proprio centro, ma il centro stesso deve a sua volta seguire un percorso preciso in senso inverso. Non siamo stati in grado di determinare matematicamente la traiettoria che deve compiere il baricentro, ma l'abbiamo individuata in modo sperimentale, osservando che deve essere sostanzialmente circolare, come rappresentato nella figura a destra. Il quadrato finale, però, avrà gli angoli smussati, perché è impossibile ottenerli di 90°.

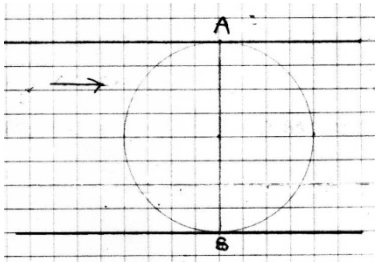


PROPRIETÀ DELLA FIGURA

Provando sperimentalmente a far ruotare la figura tra due rette parallele poste a distanza $l$ e analizzando il movimento compiuto dai punti dei lati, ci siamo accorti che la figura mantiene sempre il contatto con le due rette, cioè si muove mantenendo un'altezza costante pari a $l$.



La proprietà di riuscire a ruotare in questo modo tra due rette parallele a distanza costante vale naturalmente anche per la circonferenza.




Se le due rette hanno distanza $l$, la circonferenza che ruota fra esse ha perimetro $\pi l$ e area pari a $\pi/4\ l^2$, cioè 0.785 $l^2$ .

Ci siamo allora chiesti se esistono altre figure costruite in modo simile al triangolo curvilineo che godono della stessa proprietà. Abbiamo poi scoperto che le figure di cui parliamo si chiamano *Poligoni di Reuleaux*.

POLIGONI DI REULEAUX

La costruzione curvilinea ottenuta sul triangolo equilatero è possibile a partire da qualunque poligono regolare:

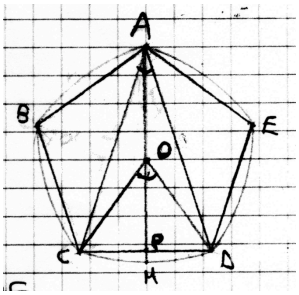
**- a lati pari**: si punta il compasso nel punto medio di un lato con ampiezza pari alla distanza tra il punto medio e uno dei due vertici del lato opposto;

**- a lati dispari**: si punta il compasso in uno dei vertici con ampiezza pari alla distanza tra esso e i vertici del lato opposto.

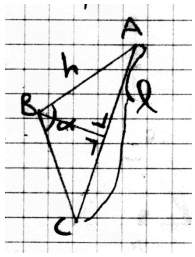
Solo le figure curvilinee ottenute a partire dai poligoni regolari a lati dispari godono però della proprietà analizzata. Abbiamo infatti constatato che mentre i poligoni a lati dispari ruotano senza mai fuoriuscire dalle parallele, quelli a lati pari escono dai limiti imposti, poiché la distanza fra i due punti di contatto del poligono con, rispettivamente, le due rette parallele, durante la rotazione, non rimane costante, bensì varia.

Da questo momento in poi abbiamo quindi considerato solo i poligoni curvilinei aventi un numero dispari di lati e ci siamo chiesti come calcolare area e perimetro, come fatto per il triangolo di Reuleaux.

Siamo partiti esaminando la figura più semplice: quella ottenuta a partire da un pentagono regolare.




Osservando che l'angolo COD è 1/5 di 360° e considerando la circonferenza di centro O e raggio OC, si ricava che l'angolo CAD misura 1/10 di angolo giro (angolo alla circonferenza che insiste sull'arco CD). Quindi l'archetto CD risulta 1/10 della circonferenza di raggio $l$ e il perimetro del pentagono di Reuleaux è pari a $\pi l$.




AC = AH = $l$,
OP = $a$,
AB = $h$
P = $\pi l$

L'area della figura si può trovare sommando l'area del pentagono ABCDE con l'area dei cinque segmenti circolari: $A_{penta} + 5(1/10\, A_{cerchio} - A_{trACD})$.

Ricordando che nel pentagono $a = 0{,}688\, h$ e notando che vale $h = 0{,}6\, l$ (vd. a lato), si ottiene che l'area totale del pentagono di Reuleaux è pari a circa $0{,}76\, l^2$.

$$A \approx 0.76 l^2 \qquad\qquad l = 2\, h \sin(\alpha/2)$$

I ragionamenti seguiti per determinare il perimetro e l'area del pentagono sono generalizzabili alle figure curvilinee con numero $n$ dispari di lati che ruotano tra due rette parallele a distanza costante $l$:

**Perimetro**: indipendentemente dal poligono regolare di partenza, il perimetro rimane costante e risulta pari a $\pi l$.

**Area**: all'aumentare del numero di lati $n$, aumenta l'area secondo la formula

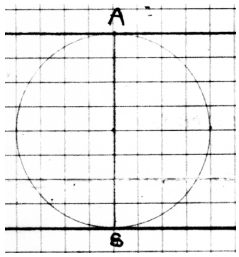
$$A = \frac{nha}{2} + n\left(\frac{1}{2n}\pi l^2 - \frac{h\sqrt{l^2 - h^2/4}}{2}\right)$$

essendo $h$ il lato del poligono, $a$ la sua apotema, $l$ la sua diagonale (di lunghezza massima) e valendo quindi $l = 2h \sin(\alpha/2)$; $\alpha = 180\ (n\text{-}2)/n$; $a/h$ = costante, indicando con $\alpha$ l'angolo interno del poligono regolare.

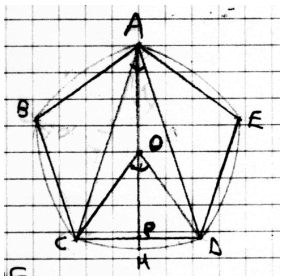
Da un confronto fra i risultati che si ottengono per i vari poligoni di Reuleaux che ruotano fra le rette parallele posta a distanza $l$, si può concludere che essi hanno tutti lo stesso perimetro, ma area differente: infatti, il triangolo di Reuleaux è la figura ad area minore, mentre il cerchio quello con area maggiore.

……

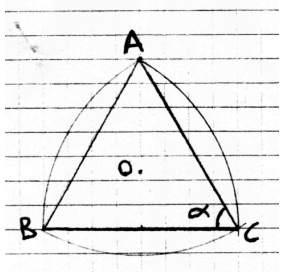
$P_\infty = \pi l$
$A_\infty \approx 0.78512\ l^2$




$P_5 = \pi l$
$A_5 \approx 0.7612\ l^2$




$P_3 = \pi l$
$A_3 \approx 0.712\ l^2$




……

**CONCLUSIONI**

Per riassumere tutti i risultati raggiunti possiamo dire che:

- il triangolo curvilineo permette di ottenere buchi quadrati ad angoli smussati;
- il triangolo curvilineo è in grado di ruotare fra due rette parallele poste a distanza costante;
- tutte le figure curvilinee ottenute a partire da poligoni regolari con un numero dispari di lati godono della stessa proprietà;
- fra queste figure, tutte di pari perimetro, la circonferenza è quella di area massima, il triangolo curvilineo quello di area minima.