Punto e segmento

Consideriamo un gioco in cui due giocatori devono giocare rispettivamente punti e segmenti di un cerchio dato. Lo scopo di uno dei due giocatori è quello di "rinchiudere" l'avversario in un cerchio di raggio fissato. Esiste una strategia che assicuri la vittoria?

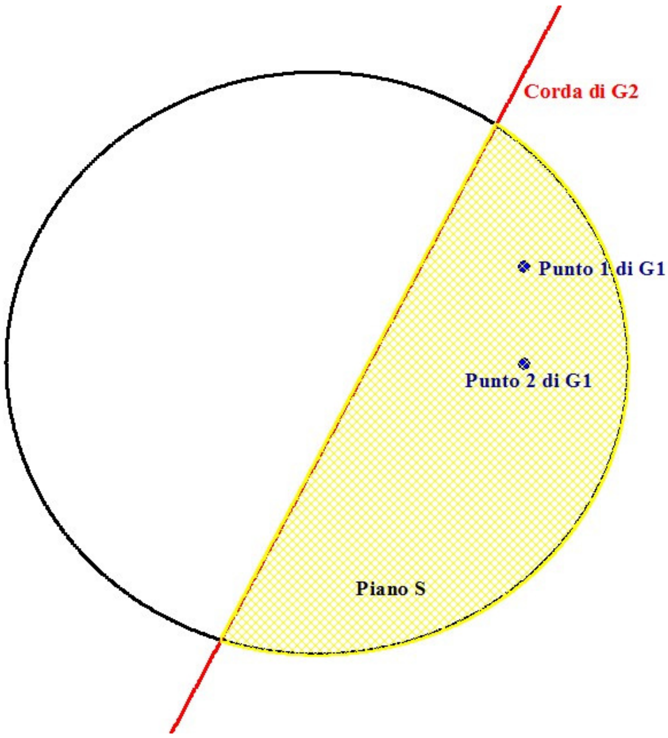
Istituto ITIS "Cartesio" – Cinisello Balsamo (MI)
Classe: II B LST
Insegnante di riferimento: prof.ssa Antonella Trevisol
Ricercatore: dott. Carlo De Bernardi
Partecipanti: Riccardo Alverdi, Gabriele Basta, Gabriele Bizzi, Dario Casamassima, Patrik Cattolico, William Chiari, Cristopher Culatina, Luca Da Col, Erica Finotti, Enrico Labate, Andrea Maccarone, Daniele Maiorano, Roberto Marrali, Emiliano Mondini, Alex Perone, Salsabil Ragh, Riccardo Ravizza, Luca Rossetti, Andrea Salvioni, Matteo Scavo, Nicholas Versolatto, Giulia Vitale, Vittorio Zippone

Ci è stato proposto di cercare delle strategie vincenti per i giocatori del seguente gioco.

Il gioco si svolge in un cerchio C di raggio *r*, che supponiamo unitario (*r*=1) e coinvolge due giocatori, che chiameremo **G1** e **G2**.

Il giocatore **G1** gioca punti nel cerchio e il giocatore **G2** gioca corde che individuano la porzione di cerchio S contenente il punto.

Inizia il giocatore **G1** che gioca un punto P1 in C; ora **G2** traccia una retta che interseca C, evidenziando così la porzione di cerchio S1 contenente P1. Si prosegue con G1, che gioca un punto P2 nella porzione di piano S1, e G2 con una nuova retta che individuerà la porzione di cerchio S2 contenente P2.



Il gioco continua così per un numero infinito di mosse.

Si fissa poi un numero positivo ***r1***.

Se, da un certo numero di mosse in poi, G2 riesce a confinare i punti di G1 in un cerchio di raggio *r1*, allora G2 vince.

Casi limite

Se **G1** sovrappone tutti i suoi punti, **G2** vince; infatti, per quanto piccolo possa essere ***r1*****,** i punti cadranno tutti al suo interno.

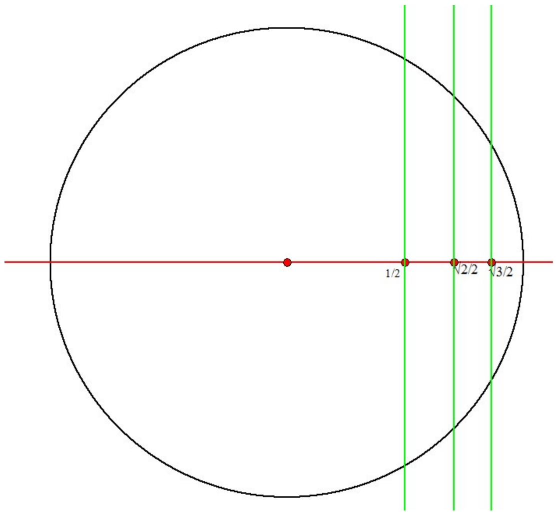
Se **G1** gioca un punto sulla circonferenza di raggio 1, allora ha perso, perché **G2** traccia la tangente alla circonferenza passante per il punto e **G1** è costretto a sovrapporre tutti i suoi punti.

Se si sceglie ***r1***>1, **G2** vince perché, qualunque punto giochi **G1,** esso cadrà all'interno di un cerchio di raggio ***r1***.

Dopo vari tentativi in cui abbiamo sempre cercato di “spingere” i punti giocati da **G1** verso la circonferenza, abbiamo individuato la seguente strategia vincente per **G2.**

Strategia del mezzo cerchio

Questa è una strategia vincente per **G2** nel caso ***r1***=1/2.

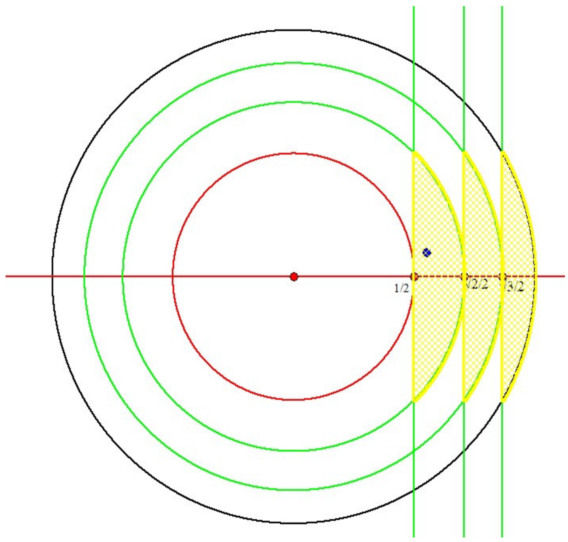


Per attuare questa strategia, **G2** preparerà un “righello” lungo 1 graduato nel quale saranno evidenziate 3 tacche: 1/2, $\sqrt{2}/2$ e $\sqrt{3}/2$.

Queste “tacche” aiuteranno **G2** ad individuare tre circonferenze concentriche.

Il giocatore **G2** è così pronto a confinare il giocatore **G1** in un cerchio di raggio 1/2.

G1 sa che se mette tutti i suoi punti all’interno della prima tacca (che vale 1/2) allora perde, perché resta all'interno di un cerchio di raggio 1/2; **G1** deve quindi uscire da quella zona.



Supponiamo che si posizioni nella zona intermedia; **G2** traccia allora la retta tangente alla circonferenza 1/2. Finché **G1** resta tra le due circonferenze perde, perché l'area gialla è contenuta all'interno di un cerchio di raggio 1/2.

G1 per poter sfuggire alla circonferenza data deve quindi spostare i suoi punti oltre la seconda “tacca”, ma inesorabile una nuova tangente di **G2** lo costringe ad andare nell’ultimo settore, sempre perché la porzione di cerchio ha raggio 1/2.

G2 gioca la sua nuova tangente e “vince”

Come si costruisce il “righello”

G2 ha preparato i sui “righelli” applicando il teorema di Pitagora iniziando dal cerchio più esterno.

Si ricordi che il raggio ***r1*** è uguale a 1/2 e che il raggio della circonferenza più grande è 1; quindi (con il teorema di Pitagora) si trova che la seconda circonferenza ha raggio :

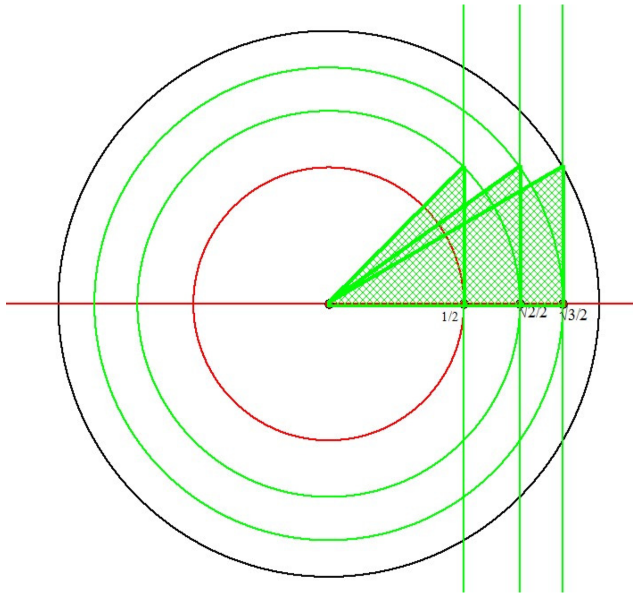
$$r = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

la terza ha raggio:

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

e l'ultima ha raggio:

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$



Caso generale

Il problema di **G2** è quindi quello di costruirsi i “righelli” in modo opportuno comunque si scelga il raggio della circonferenza piccola.

Noi abbiamo trovato, nei vari esempi considerati, che se la circonferenza piccola ha raggio $1/n$ di quella grande (con n intero positivo) il numero delle “tacche” del nostro “righello” è n^2-1, e siamo in grado, con un po' di pazienza, di trovare il valore di tutte le “tacche” necessarie.