Punto e segmento

Consideriamo un gioco in cui due giocatori devono giocare rispettivamente punti e segmenti di un cerchio dato. Lo scopo di uno dei due giocatori è quello di "rinchiudere" l'avversario in un cerchio di raggio fissato. Esiste una strategia che assicuri la vittoria?

L.S.S. "G. Marconi" – Milano
Classi: II B e II C
Insegnante di riferimento: prof.ssa Maria Luisa Pagani
Ricercatore: dott. Carlo De Bernardi
Partecipanti: Enrico Carangelo, Ilaria Crispino, Davide Croce, Filippo Gaifami, Pietro Giacometti, Danilo Lentini, Stefano Magnani, Daniele Oppedisano, Irene Parolini, Federico Pozzoni, Chiara Veronese, Roberto Verzanini, Marta Vittani

DESCRIZIONE DELLE REGOLE DEL GIOCO E PRIME OSSERVAZIONI

Sono fissati un cerchio C di raggio uno e un numero $r>0$. Al gioco "PUNTO SEGMENTO" partecipano due giocatori, G_1 e G_2, alternandosi nelle mosse del gioco: G_1 gioca sempre punti in C, G_2 semipiani che intersechino C.

1° passo
- G_1 gioca un punto P_1 appartenente al cerchio C.
- G_2 sceglie un semipiano S_1 che contenga il punto P_1.

2° passo
- G_1 gioca un punto P_2 appartenente al segmento circolare individuato dall'intersezione del semipiano S_1 con C.
- G_2 sceglie un altro semipiano, diciamo S_2, che contenga il punto P_2 scelto da G_1.

Il gioco continua in questo modo per tutti i passi successivi. Ad ogni passo, il semipiano giocato da G_2 contiene anche la retta che lo definisce.

G_2 vince se, da un certo passo in poi, tutti i punti giocati da G_1 sono contenuti in una circonferenza di raggio r (dove r è il numero positivo fissato all'inizio del gioco). In caso contrario vince G_1.

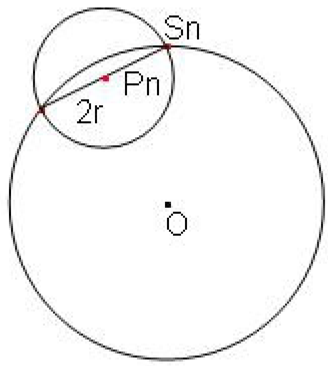
PROBLEMA: esiste per il giocatore G_2 una strategia vincente? Ovvero, esiste per il giocatore G_2 un modo di giocare per essere sicuro di vincere?

Questo è il gioco che il dott. Carlo De Bernardi ci ha presentato. Subito abbiamo fatto alcune semplici considerazioni:

- G_2 vince se *r è* maggiore o uguale a uno, raggio del cerchio C entro la quale si gioca; restringiamo dunque la nostra attenzione al caso $0<r<1$.

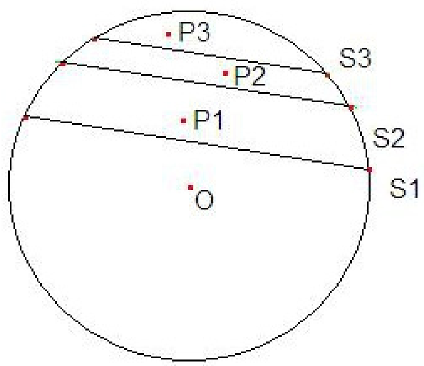
- G_2 può vincere facilmente se G_1 gioca un punto P sulla circonferenza che definisce C; infatti per vincere gli basta giocare il semipiano che interseca il cerchio C solamente in P (determinato dalla retta tangente al cerchio C in P).

- Abbiamo capito che se G_2 sceglie sempre semipiani individuati da corde con crescente distanza dal centro, fino a raggiungere una lunghezza della corda di $2r$, allora riesce a "chiudere" G_1 in un segmento circolare avente la corda pari a $2r$.



Quindi G_2 ha vinto perché tutti i punti appartenenti a questo segmento circolare, dove è costretto ad "abitare" il punto di G_1, giacciono all'interno della circonferenza di raggio r, essendo la corda che lo individua pari al diametro.

Se G_2 gioca rette parallele e se G_1 sceglie sempre punti che non appartengono alle rette e "abbastanza distanti", allora si riesce a chiudere G_1 in un segmento circolare avente la corda pari a $2r$.

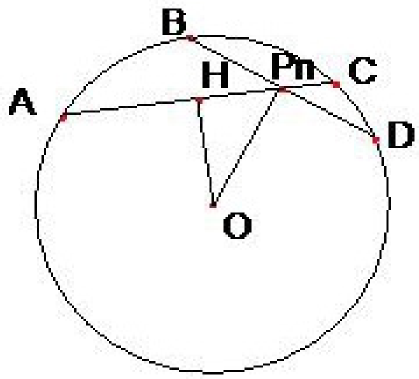


Tuttavia, G_1 potrebbe giocare i punti sempre su una di queste rette, dunque, in generale, la strategia non funziona. Però l'idea che i segmenti giocati da G_2 debbano diminuire di lunghezza sembra essere determinante per la vittoria di G_2.

LA STRATEGIA DEI PUNTI MEDI

Dopo le osservazioni precedenti abbiamo cercato di capire come disegnare la corda di minima lunghezza passante per il punto P_n, giocato dal giocatore G_1.

Tale corda è quella che ha distanza maggiore dal centro, ovvero la corda perpendicolare al segmento OP_n.



DIMOSTRAZIONE:
AC ha distanza OH dal centro. OH è minore di OP_n , poiché quest'ultimo è l'ipotenusa del triangolo rettangolo OHP_n , quindi BD<AC, infatti

$$\mathrm{BD} = 2\mathrm{P}_n\mathrm{D} = 2\sqrt{1-\mathrm{OP}_n^2} < 2\sqrt{1-\mathrm{OH}^2} = \mathrm{AC}$$

■

Tutto questo ci ha portato a formulare la strategia di gioco per G_2 , che chiameremo *strategia del punto medio*, descritta di seguito.

Fissiamo un semipiano qualsiasi, diciamo S, determinato da una retta passante per il centro di C. Al passo *n*-esimo, dopo che il giocatore G_1 ha giocato il punto P_n, si presentano solamente due possibilità: P_n coincide con O, il centro di C, oppure no. Nel primo caso, G_2 gioca il semipiano S_n=S fissato in precedenza; nel secondo caso, G_2 gioca scegliendo il semipiano S_n che contenga il punto P_n e che abbia distanza massima dal centro di C; cioè, il semipiano S_n non contenente O e determinato dalla retta passante per P_n e ortogonale al segmento O P_n.
Durante il secondo incontro il ricercatore ci ha detto che la strategia del punto medio da noi trovata, che ci sembrava adatta a "spingere" i punti verso l'esterno fino a intrappolarli, non è vincente. Purtroppo la relativa dimostrazione è troppo difficile per le nostre conoscenze, ma il prof. De Bernardi ci ha spiegato che i punti giocati da un giocatore G_1 esperto potrebbero continuare a girare attorno al centro del cerchio C senza farsi intrappolare.

LA STRATEGIA DEI PUNTI MEDI MODIFICATA

La strategia del punto medio non è stata completamente abbandonata bensì opportunamente modificata.

Al primo passo del gioco, il giocatore G_1 sceglie un punto P_1 in C e il giocatore G_2 sceglie il semipiano S_1 come nella strategia del punto medio, spiegata poco fa. Inoltre G_2 considera una circonferenza di raggio r (fissato all'inizio del gioco) centrata in P_1. A questo punto ci sono solo due casi possibili:
- nei passi successivi del gioco il giocatore G_1 continua a scegliere punti in S_1 che siano anche nel cerchio di raggio r centrato in P_1 e in tal caso G_2 continua a giocare scegliendo sempre il semipiano S_1;
- ad un certo punto del gioco, il giocatore G_1 gioca un punto, diciamo P_2, che stia in S_1 ma non nel cerchio di raggio r centrato in P_1. In tal caso, G_2 gioca il semipiano S_2 che contenga P_2 e che abbia massima distanza dal centro di C.

Ovviamente, nel primo caso, G_2 vince perché tutti i punti giocati da G_1 stanno all'interno di un cerchio di raggio r.

Supponiamo di essere nel secondo caso e supponiamo che G_2 abbia appena giocato S_2.
A questo punto ci sono solo due casi possibili:
- nei passi successivi del gioco il giocatore G_1 continua a scegliere punti in S_2 che siano anche nel cerchio di raggio r centrato in P_2 e in tal caso G_2 continua a giocare scegliendo sempre il semipiano S_2;
- ad un certo punto del gioco, il giocatore G_1 gioca un punto, diciamo P_3, che stia in S_2 ma non nel cerchio di raggio r centrato in P_2. In tal caso, G_2 gioca il semipiano S_3 che contenga P_3 e che abbia massima distanza dal centro di C.
È ora chiaro come procedere e quale sia la strategia di G_2.

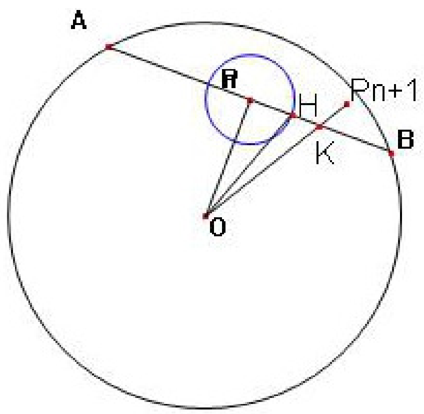
Abbiamo subito osservato che il punto P_{n+1} si trova nel semipiano opposto a quello che contiene O rispetto alla corda AB, individuata dal semipiano S_n. Quindi OP_{n+1} incontra AB in un punto K. Essendo $OP_n<OK<OP_{n+1}$ $(=OK+KP_{n+1})$ possiamo affermare che $OP_{n+1} > OP_n$.

Durante l'ultimo incontro, il ricercatore ci ha chiesto di provare che questa strategia sia di fatto vincente per G_2, ovvero che, al crescere di n, la lunghezza del segmento OP_n continua ad aumentare in modo tale che, a un certo punto, il segmento circolare, individuato da S_n, sia contenuto in un cerchio di raggio r.

Per fare questo, ci siamo posti l'obiettivo di provare a quantificare la differenza tra OP_n e OP_{n+1}. Il risultato ottenuto è: $OP_{n+1} > \sqrt{\mathrm{OP}_n^2 + r^2}$.

Per semplicità abbiamo suddiviso la dimostrazione di questa disuguaglianza in tre casi.

1° CASO



$$\mathrm{OP}_{n+1} = \mathrm{OK} + \mathrm{KP}_{n+1} > \mathrm{OK} > \mathrm{OH} = \sqrt{\mathrm{OP}_n^2 + r^2}$$

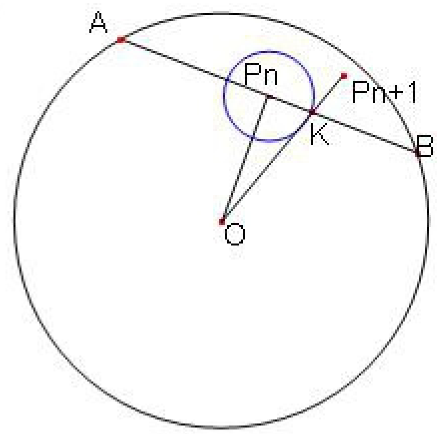
Per il teorema dell'angolo esterno:

$$\mathrm{O\hat{H}K} > \mathrm{O\hat{P}}_n\mathrm{H} = \frac{\pi}{2}$$

$\mathrm{O\hat{H}K}$ è l'angolo maggiore nel triangolo $\mathrm{OHK} \Longrightarrow \mathrm{OK} > OH$ (ad angolo maggiore si oppone lato maggiore).

Quindi $\mathrm{OP}_{n+1} > \sqrt{\mathrm{OP}_n^2 + r^2}$.

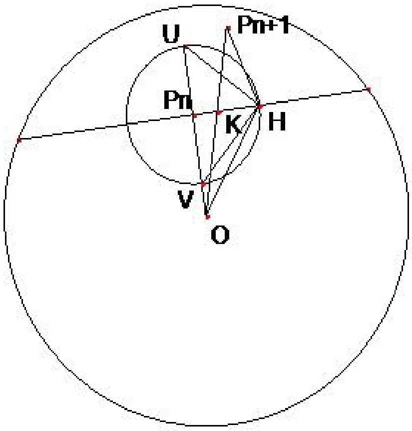
2° CASO



$$\mathrm{OP}_{\mathrm{n}+1} = \mathrm{OK} + \mathrm{KP}_{\mathrm{n}+1} > \mathrm{OK} = \sqrt{\mathrm{OP}_n^2 + \mathrm{r}^2}$$

Quindi $\mathrm{OP}_{\mathrm{n}+1} > \sqrt{\mathrm{OP}_n^2 + \mathrm{r}^2}$.

3° CASO



Siano U e V le intersezioni della circonferenza di raggio r e centro P_n con la retta che contiene il segmento OP_n.
Il triangolo UVH è retto in H, dunque l'angolo $O\hat{H}P_{n+1} > 90°$. Allora OP_{n+1} si oppone all'angolo maggiore nel triangolo OHP_{n+1}. Quindi OP_{n+1} è maggiore di OH. Ora si possono fare le stesse considerazioni precedenti.

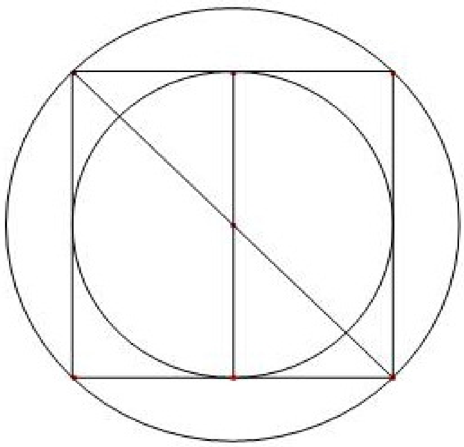
Dalla disuguaglianza $OP_{n+1} > \sqrt{\mathrm{OP}_n^2 + r^2}$ segue

$$\mathrm{OP}_{n+1}^2 > \mathrm{OP}_n^2 + r^2 > \cdots > \mathrm{OP}_1^2 + nr^2 \geq nr^2,$$

dunque la strategia descritta sopra è vincente per G_2.

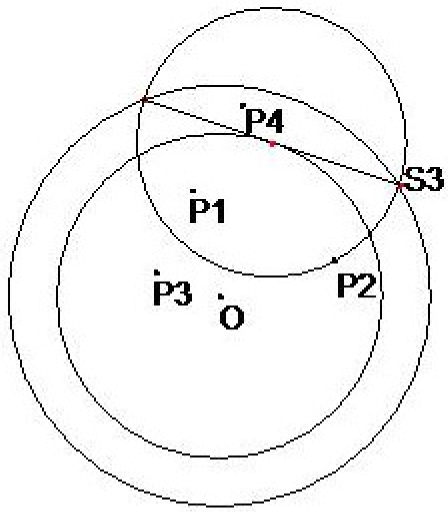
IL QUADRATO INSCRITTO

Il ricercatore, nel secondo incontro, ci ha fatto anche riflettere sul disegno riportato di seguito, dicendoci che da qui avremmo potuto cogliere degli spunti per un'altra possibile strategia vincente per G_2.



Consideriamo una circonferenza di raggio uguale a 1 e centro in O e consideriamo un quadrato inscritto in tale circonferenza. La diagonale del quadrato è il diametro della circonferenza e misura quindi 2. Dalla nota relazione tra il lato l e la diagonale d di un quadrato, ricaviamo $l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
Consideriamo la circonferenza inscritta nel quadrato.
Il diametro è uguale al lato del quadrato, cioè $\sqrt{2}$.

Conseguenze relative al gioco punto e segmento: supponiamo che $r=\sqrt{2}/2$, allora G_2 può vincere giocando nel modo seguente.
Se G_1 gioca sempre punti all'interno della circonferenza C_1 di centro O e raggio $\sqrt{2}/2$, allora G_2 vince. Supponiamo che, ad un certo passo G_1 giochi un punto P all'esterno di C_1. Allora G_2 può giocare un semipiano S che contenga P e che sia determinato da una retta tangente a C_1. Da questo punto in avanti, G_2 giocherà sempre scegliendo il semipiano S. In questo modo G_2 vincerà sicuramente, poiché la corda di C, individuata da S, ha esattamente lunghezza $\sqrt{2} = 2r$.

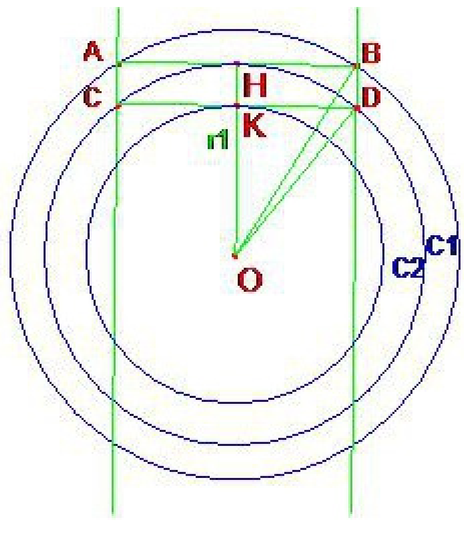


Effettivamente, ragionando su queste considerazioni, abbiamo sviluppato la seconda strategia vincente per il giocatore G_2, quella delle circonferenze concentriche.

LA STRATEGIA DELLE CIRCONFERENZE CONCENTRICHE

Fissiamo $0<r<1$, raggio della circonferenza entro cui devono essere contenuti definitivamente i punti giocati da G_1 affinché G_2 vinca; si costruisce una corda AB di lunghezza pari a $2r$ e il suo relativo asse passante per H, punto medio della corda, e O, centro della circonferenza (proprietà della corda). Si traccia una circonferenza C_1 di raggio OH e centro O. Essendo il triangolo OHB rettangolo in H e HB congruente a r, per il teorema di Pitagora OH è congruente a $\sqrt{1-r^2}$. C_1 ha dunque raggio $r_1 = \sqrt{1-r^2}$.

Si costruisce una corda di C_1, CD, di lunghezza $2r$ e il relativo asse che passa per K, punto medio della corda. Si traccia una circonferenza C_2 di raggio OK e centro O. Essendo il triangolo OKD rettangolo in K e KD congruente a r, per il teorema di Pitagora, OK è congruente a $\sqrt{r_1^2 - r^2} = \sqrt{1-r^2-r^2} = \sqrt{1-2r^2}$. C_2 avrà dunque raggio $r_2 = \sqrt{1-2\mathrm{r}^2}$.



Continuando in questo modo, la terza circonferenza inscritta avrà raggio $r_3=\sqrt{1-3r^2}$ e così via fino al raggiungimento di una circonferenza di raggio r_n tale che $0 < r_n \le r$.

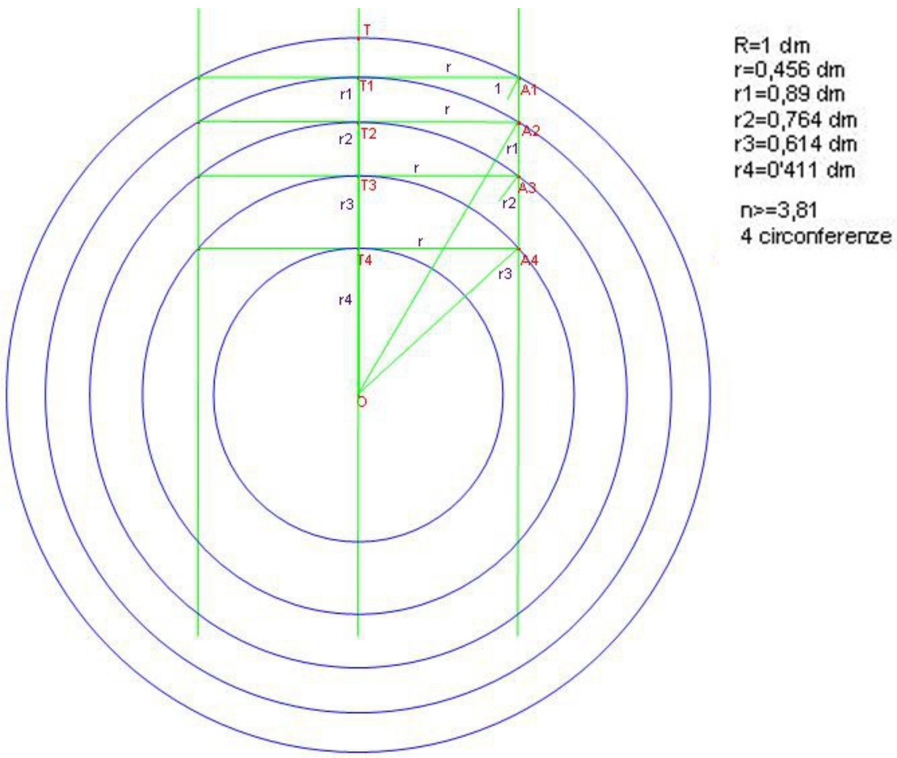
Ci siamo posti il problema di trovare una formula generale che ci permetta di calcolare il numero di circonferenze concentriche da costruire:

$C_1 \rightarrow r_1 = \sqrt{1 - r^2}$
$C_2 \rightarrow r_2 = \sqrt{r_1^2 - r^2} = \sqrt{1 - r^2 - r^2} = \sqrt{1 - 2r^2}$
$C_3 \rightarrow r_3 = \sqrt{r_2^2 - r^2} = \sqrt{1 - 2r^2 - r^2} = \sqrt{1 - 3r^2}$
$C_n \rightarrow r_n = \sqrt{r_{n-1}^2 - r^2} = \sqrt{1 - (n-1)r^2 - r^2} = \sqrt{1 - nr^2}$

Quindi $r_n^2 = 1 - nr^2$ e l'ultima circonferenza da costruire deve avere raggio $\leq r$.
Ponendo $0 < r_n^2 \leq r^2$ troviamo $\frac{1}{r^2} - 1 \leq n < \frac{1}{r^2}$.
Il numero di circonferenze concentriche da disegnare sarà l'unico intero *n* che soddisfi tale condizione o, equivalentemente, il più piccolo intero *n* tale che $n \geq \frac{1-r^2}{r^2}$.

Esempi: r = 0,1: $n \geq \frac{1-0{,}01}{0{,}01} = \frac{0{,}99}{0{,}01} = 99$
Le circonferenze concentriche necessarie saranno 99.

r = 0,05: $n \geq \frac{1-0{,}025}{0{,}0025} = \frac{0{,}9975}{0{,}0025} = 399$
Si avranno 399 circonferenze concentriche.

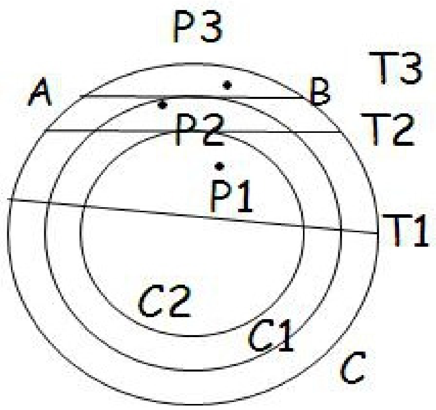


Nel disegno sopra riportato è bastato disegnare 4 circonferenze, L'ultima ha raggio r_4 minore di *r*.

DESCRIZIONE DELLA STRATEGIA

Spieghiamo la strategia di gioco per G_2 nel caso in cui, fissato r all'inizio del gioco, si trovi n=2. Sarà poi chiaro come procedere nel caso generale.
Se G_1 gioca un punto P_1 all'interno di C_2, G_2 sceglie un semipiano qualsiasi che contenga P_1 definito da una retta T_1, come nella figura riportata di seguito.
Se G_1 continua a giocare punti dentro C_2, G_2 sceglie sempre lo stesso semipiano.
In questo modo G_2 vince poiché il raggio di C_2 è minore o uguale a r.
Se G_1 invece esce da C_2 e mette un punto P_2 nella corona circolare compresa tra C_1 e C_2, allora G_2 sceglie un semipiano che contenga P_2, determinato da una retta T_2 tangente a C_2.

Se G_1 continua a giocare punti all'interno della prima corona circolare, G_2 continua a fare la mossa precedente e, per come abbiamo costruito le circonferenze C_1 e C_2, vince.
Se G_1 invece esce e sceglie un punto P_3 nella successiva corona circolare, allora G_2 sceglie un semipiano che contenga P_3, determinato da una retta T_3 tangente a C_1.
A questo punto, per come è stata costruita C_1, tutti i punti che G_1 può giocare sono imprigionati in una circonferenza di raggio r, quindi G_2 vince.



CONCLUSIONI

Abbiamo limitato la nostra ricerca a trovare strategie vincenti per G_2 (infatti non possono esistere strategie vincenti per G_1, questo segue da come è definito il gioco), ne abbiamo trovate due. Saranno le uniche? Esisterà una tattica vincente per G_2 (ovvero una strategia di gioco vincente per G_2 tale che la giocata di G_2 dipenda solamente dall'ultima mossa di G_1)? La ricerca rimane aperta!

Questa esperienza è stata molto costruttiva e ci ha fatto capire che la matematica non è fatta solo da calcoli e dimostrazioni, ma anche da un continuo ed intenso lavoro di ricerca e di gruppo, in cui sono proprio gli errori a farci avvicinare sempre di più alla soluzione.
La giornata finale è stata un'esperienza ricca di ansia, emozione e soddisfazione.
Presentare il nostro lavoro a docenti e ricercatori universitari, a insegnanti e studenti di altre scuole, ai genitori presenti, farli giocare (sempre nel ruolo di G_1 naturalmente!), è stato veramente l'adeguato finale di questa appassionante avventura.

CHIARA, DANIELE, DANILO, DAVIDE, ENRICO, FEDERICO, FILIPPO, ILARIA, IRENE, MARTA, PIETRO, ROBERTO, STEFANO RINGRAZIANO IL DOTT. CARLO DE BERNARDI, LA PROF. LUISA PAGANI, I COMPAGNI DI VIAGGIO DELL'ISTITUTO "CARTESIO", IL CENTRO "MATEMATITA" PER AVERCI FATTO "GIOCARE", APPASSIONARE, EMOZIONARE!