Un quadretto in più o in meno

Quesito 1

Se scomponiamo un quadrato costituito da 64 quadratini (figura 1) e lo ricomponiamo sotto forma di rettangolo (come in figura 2), questo occupa una superficie di 65 quadratini. Come mai?

Quesito 2

Se scomponiamo lo stesso quadrato costituito da 64 quadratini come fatto nel quesito 1, possiamo utilizzare questi pezzi per comporre una figura che occupa una superficie di 63 quadratini (figura 3). Come mai?

Quesito 3

Se scomponiamo un triangolo in quattro pezzi, come in figura 4, e lo ricomponiamo cambiando la disposizione dei pezzi, ci accorgiamo che manca un quadratino. Come mai?

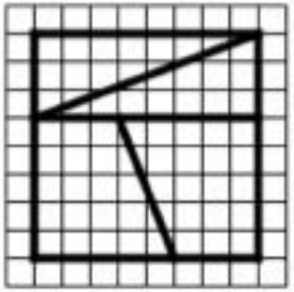


Figura 1

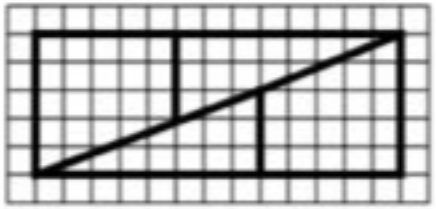


Figura 2

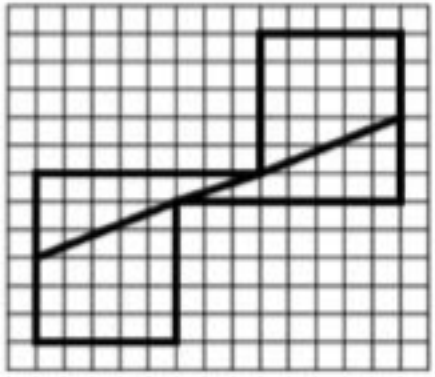


Figura 3

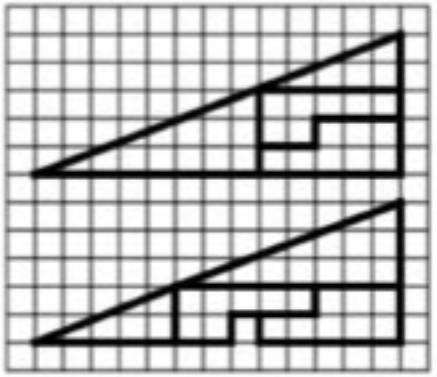


Figura 4

Istituto Comprensivo Statale "A. Manzoni" - MERATE (LC)
a.s. 2009/2010

Progetto
"Math.en.Jeans"

Classe II B

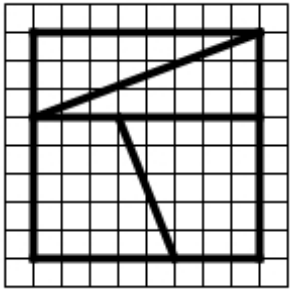
Insegnante: prof.ssa Licia Zappa Ricercatore: dott. Alexandro Redaelli

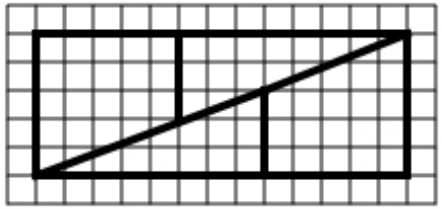
Gruppo di lavoro: Massimiliano Baiguini, Giorgia Bertoli, Ludovica Cantù, Martina Casati, Lisa Fumagalli, Emanuele Mattavelli, Alessio Montesano, Linda Perego, Iulian Scutareanu, Carmen Spinetto, Matteo Squillace, Giovanni Tozzato, Alessia Valsecchi, Giulia Valagussa

Con la partecipazione di: Beatrice Bonfanti, Denny Bonfanti, Amin Ladraa, Kristi Marini, Habib Mbow, Alberto Vasquez, Elena Ventola

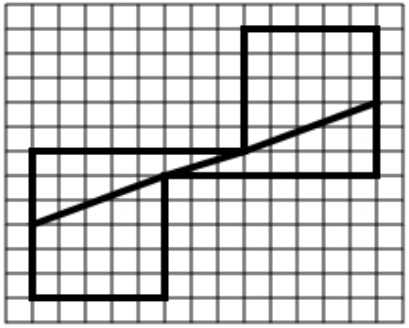
UN QUADRETTO IN PIÙ O UNO IN MENO?

Se spostiamo i quattro pezzi che formano il quadrato 8x8, in figura, è possibile comporre un rettangolo di 5x13. Possiamo osservare che il quadrato è formato da 64 quadretti mentre il rettangolo da 65, eppure sono entrambi composti dagli stessi pezzi!
Come è possibile che accada questo strano fatto?

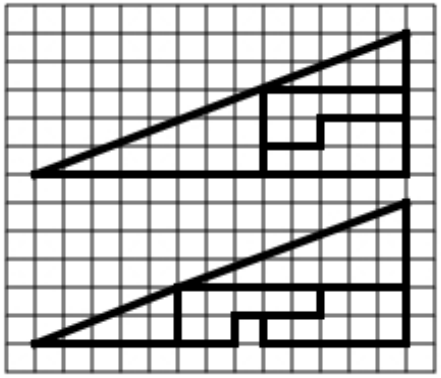




Inoltre se arrangiamo i quattro pezzi del quadrato come in figura sottostante, possiamo ottenere una figura geometrica composta da 63 quadretti. Dove è finito il quadretto mancante?



Le due figure sottostanti sono arrangiamenti una dell’altra, composte dagli stessi quattro pezzi.
La seconda figura risulta avere un quadretto in meno della prima. Perché?



Ci siamo posti varie domande che possiamo riassumere nelle due seguenti:

1) PERCHÉ c'è un quadretto in più o in meno?
2) È proprio UN quadretto?

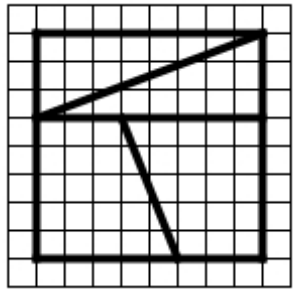
Osservando attentamente, abbiamo concluso che:

IL TRUCCO C'È!!!!!!!

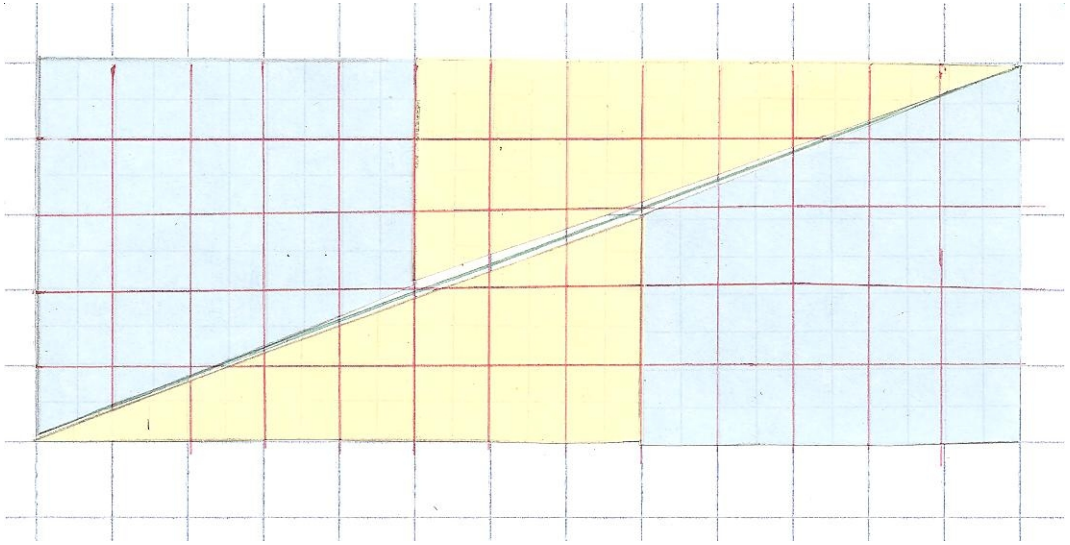
e ora lo dimostriamo

PERCHÉ c’è un quadretto in più o in meno?

Componendo i quattro pezzi della figura 1 in modo da formare il rettangolo 13x5, si vede che il lato obliquo del trapezio e l’ipotenusa del triangolo rettangolo non coincidono con la diagonale del rettangolo, ma formano una spezzata. Nel vertice comune alla figura gialla e azzurra si forma un angolo concavo



~ 112°+69°30’= 181° 30’

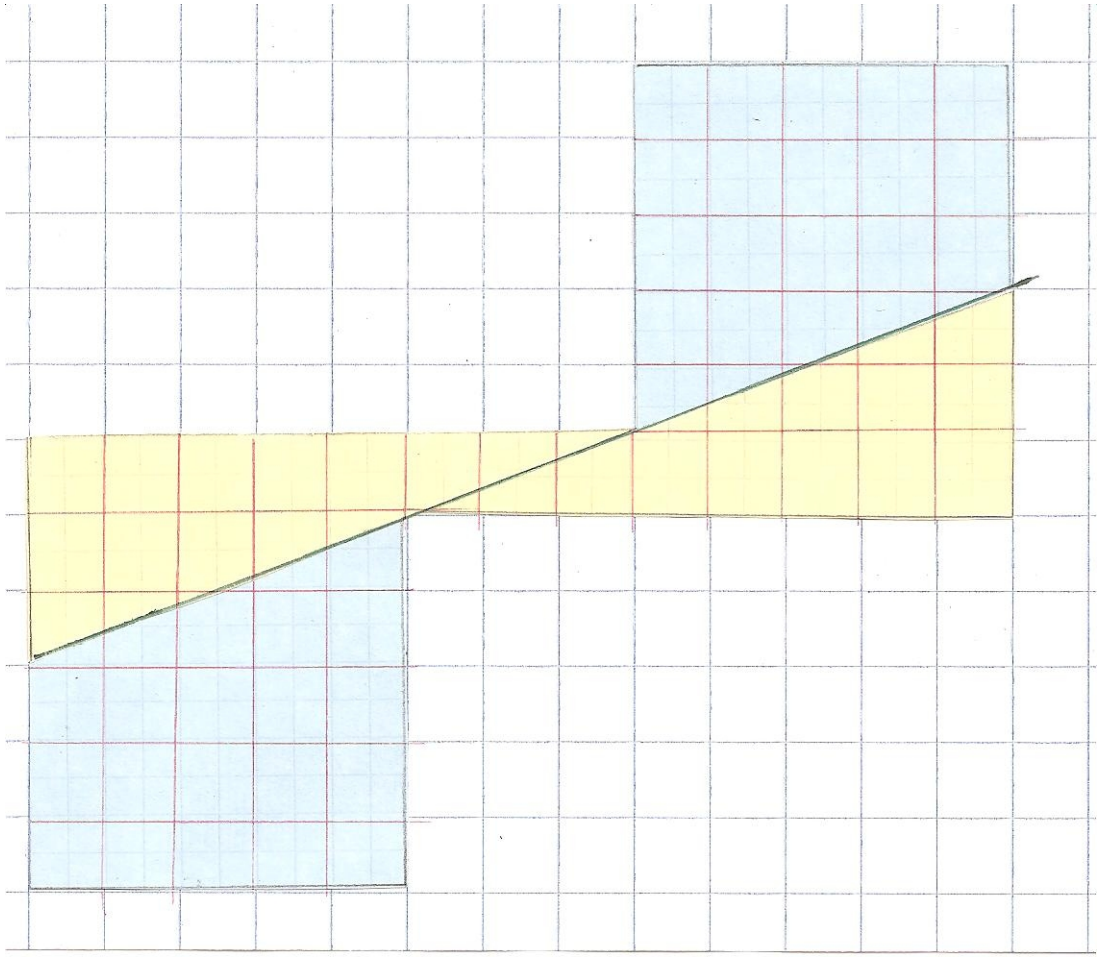


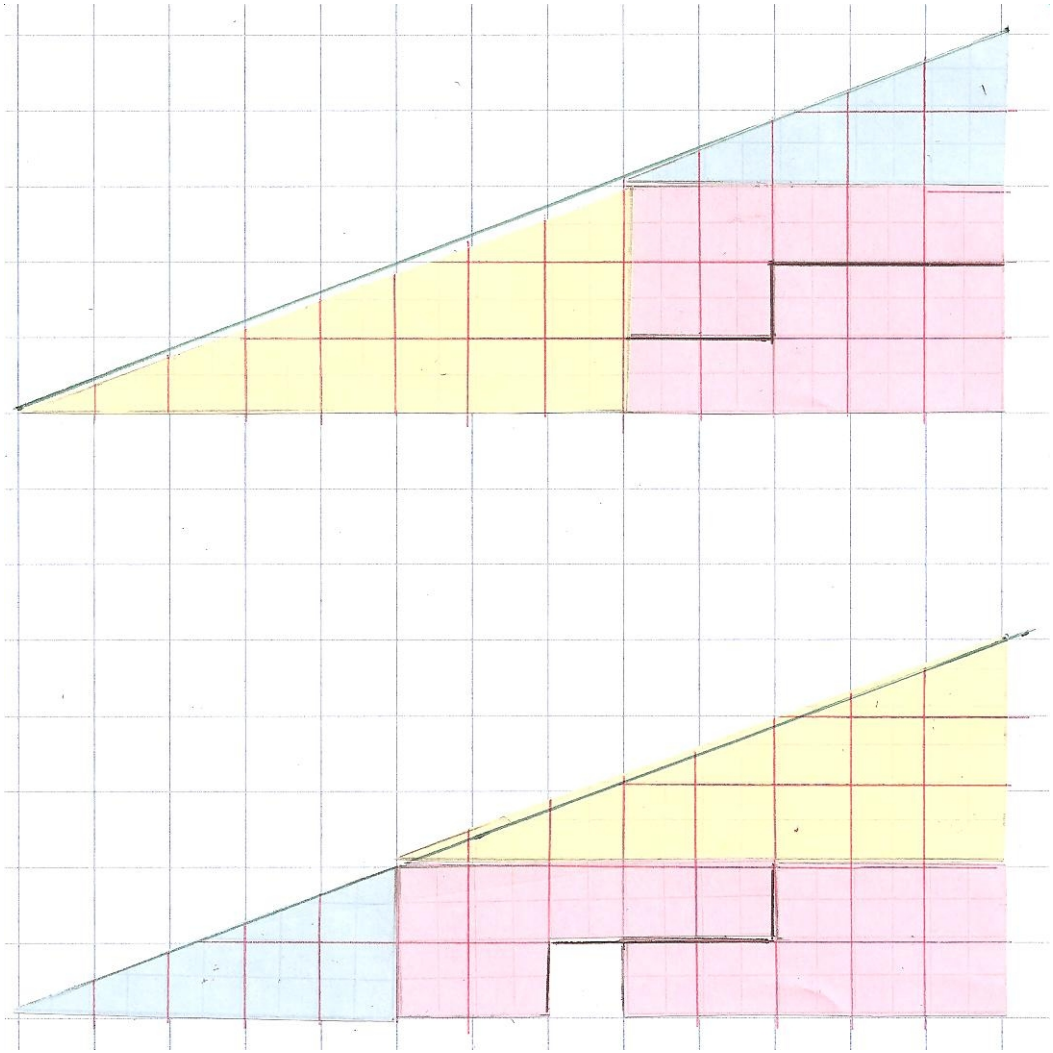
RIMANE UNO SPAZIO VUOTO: IL QUADRETTO IN PIÙ!!!

Usando sempre i quattro pezzi della figura 1 per ottenere la figura a fianco, si vede che alcune parti si sovrappongono

(IL QUADRETTO IN MENO!!!)

e il segmento che attraversa in diagonale la figura, in realtà non c’è ma anche in questo caso è una spezzata.





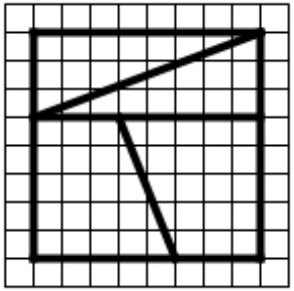
Le ipotenuse dei triangoli azzurro e giallo non sono allineate (non appartengono alla stessa retta), ma nel primo caso (se consideriamo anche l'angolo retto rosa) si forma un angolo concavo (~ 181° 30') e nel secondo caso un angolo convesso (~ 178° 30') .
Allora la figura che si forma è un FALSO triangolo rettangolo perché in realtà è un QUADRILATERO!

Da queste osservazioni concludiamo che:

C’è un QUADRETTO in PIÙ o in MENO perché nel disegnare le figure ottenute dal quadrato di partenza si sono “adattate” le parti in modo che ci fosse la suddivisione presentata nel problema iniziale, anziché usare effettivamente i pezzi della prima figura.

È proprio UN quadretto che fa la differenza?

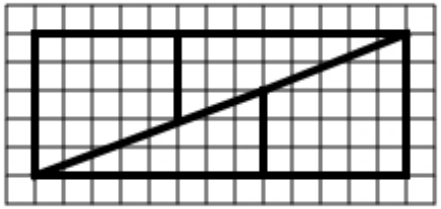
Abbiamo calcolato le misure delle varie aree contando i quadretti



Area quadrato = 64 q

Area triangolo = ½ area rettangolo = ½ (8 · 3) = 12 q

Area trapezio = ½ area rettangolo = ½ (8 · 5) = 20 q



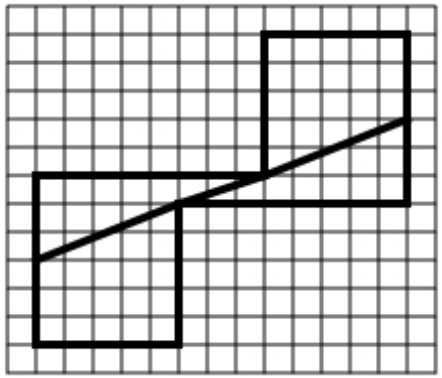
Area rettangolo = 65 q

Area triangolo · 2 + area trapezio · 2 = 12 · 2 + 20 · 2 = 64 q

65 – 64 = 1 Ecco il quadretto di differenza!

(la parte bianca che si forma attorno alla diagonale del rettangolo grande)

Area figura = $5 \cdot 6 + 3 + 5 \cdot 6 = 63$ q
Area triangolo $\cdot 2$ + area trapezio $\cdot 2 = 12 \cdot 2 + 20 \cdot 2 = 64$ q

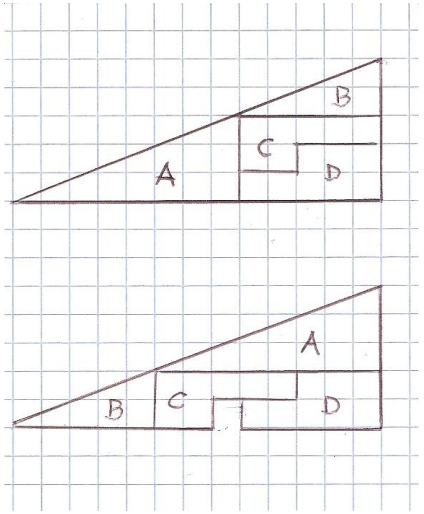


$64 - 63 =$ 1 Ecco il quadretto di differenza!
(la parte corrispondente alla zona in cui le figure si sovrappongono)

Area “vero” triangolo = ½ (13 · 5) = 32,5 q

Area triangolo A + area triangolo B + area figura C + area figura D = ½ (8 · 3) + ½ (5 · 2) + 7 + 8 = 12 + 5 + 7 + 8 = 32 q

Area triangolo B + area triangolo A + area figura C + area figura D + quadretto = 5 + 12 + 7 + 8 + 1 = 33 q



Nel primo caso il “vero” triangolo ha ½ quadretto in più del quadrilatero formato dalle quattro figure.
Nel secondo caso il “vero” triangolo ha ½ quadretto in meno del quadrilatero formato dalle quattro figure.

½ + ½ = 1

Ecco il quadretto di differenza!
(la parte bianca sotto e sopra l’ipotenusa del “vero” triangolo)

IL NOSTRO PERCORSO

mezzi - metodo - tappe - spunti di approfondimento

MEZZI

- Carta quadrettata bianca e colorata
- Pennarelli, pastelli, forbici
- Riga, squadra, goniometro
- Programma Autocad
- Gli spunti dati dal nostro ricercatore

METODO

- Lavoro a gruppi (3 gruppi): ogni gruppo ha analizzato una parte del problema
- Momenti comuni di condivisione dei risultati, i discussione e di approfondimento
- Comunicazione sul forum del lavoro svolto e dei risultati ottenuti, richiesta di chiarimenti, raccolta di informazioni per i successivi approfondimenti

TAPPE

- Ingrandimento delle figure su carta quadrettata, tracciando le linee di contorno e interne con un pennarello a punta sottile.

- Taglio del quadrato e del primo triangolo nelle parti che li compongono e uso di queste parti per comporre le altre figure (e viceversa)

PRIMA OSSERVAZIONE: le parti NON coincidono.

- Misura degli angoli con il goniometro
- Misura degli angoli con Autocad
- Osservazioni relative al concetto di pendenza

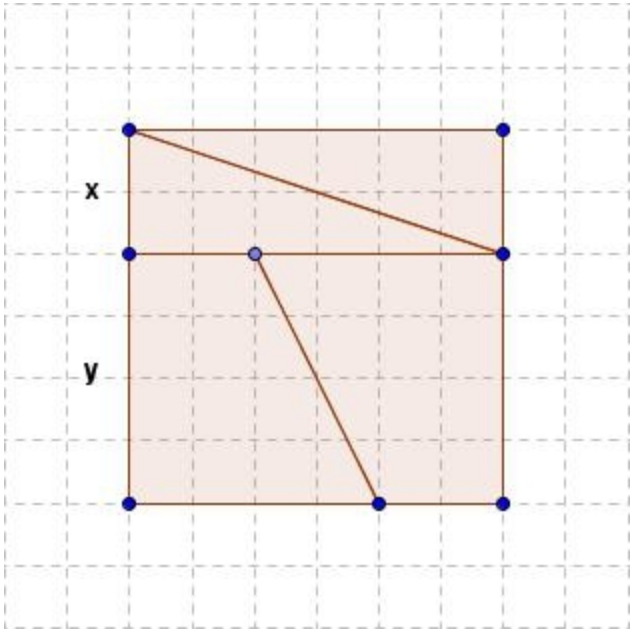
SECONDA OSSERVAZIONE: ci sono segmenti che sembrano allineati ma in realtà non lo sono.

- Misura delle aree utilizzando il quadretto come unità di misura e senza ricorrere a formule

TERZA OSSERVAZIONE: le area differiscono di un quadretto

- Analisi di situazioni analoghe, ma con misure diverse del lato del quadrato di partenza e dei lati delle parti in cui è suddiviso.

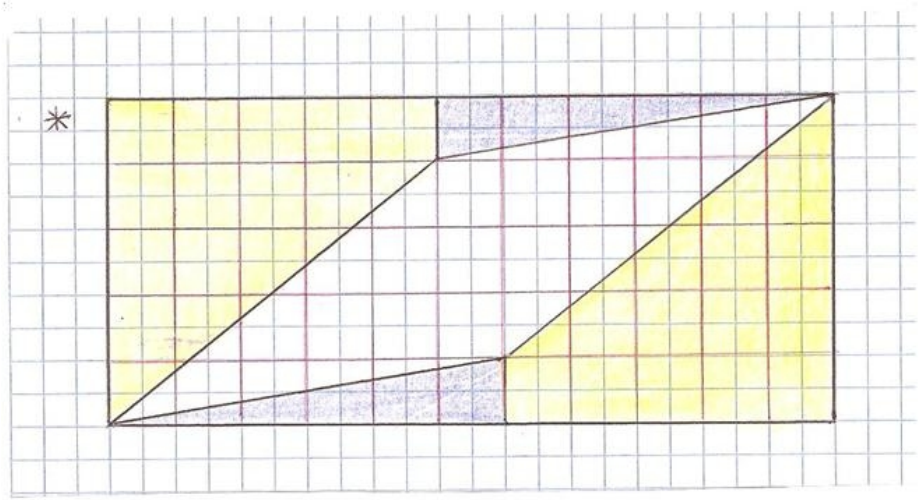
Esempio:

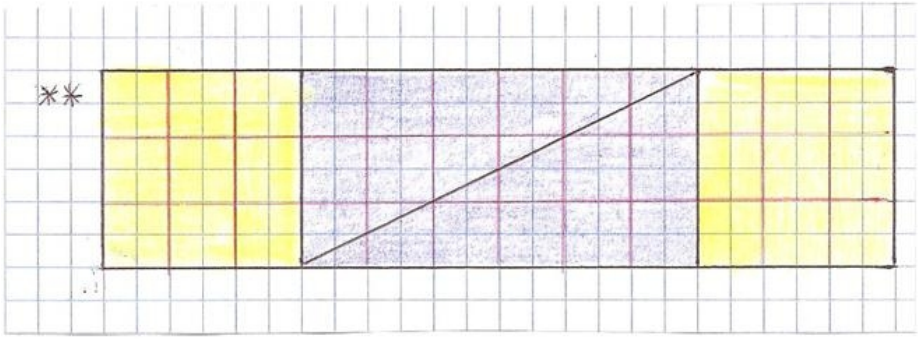


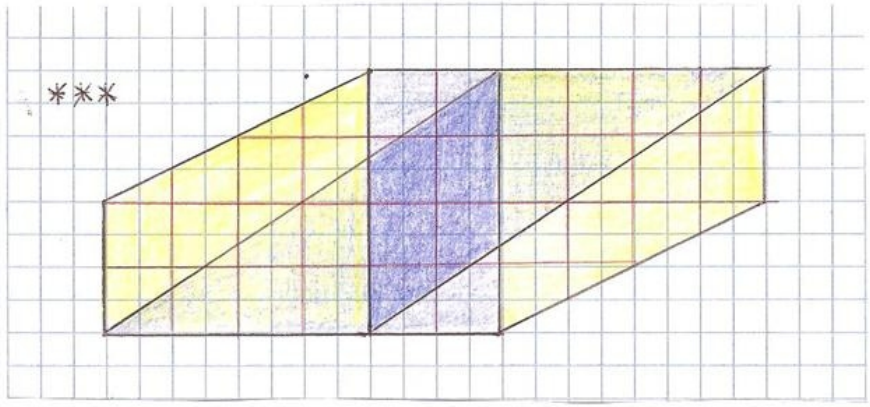
lato	X (in cm)	Y (in cm)
6	1	5
6	2	4
6	3	3
6	4	2
6	5	1

Abbiamo provato a disegnare il rettangolo ottenuto con le parti ricavate dal quadrato e abbiamo visto che si presentavano tre situazioni diverse:

- 1° caso (corrispondente alla prima e seconda riga): il rettangolo si costruisce, ma rimane al centro uno spazio ben più grande di un quadretto;
- 2° caso (corrispondente alla terza riga): si costruisce un rettangolo con lo stesso numero di quadretti del quadrato, ma disponendo le figure in modo diverso.
- 3° caso (corrispondente alla quarta e quinta riga): non si riesce a costruire il rettangolo perché le parti si sovrappongono





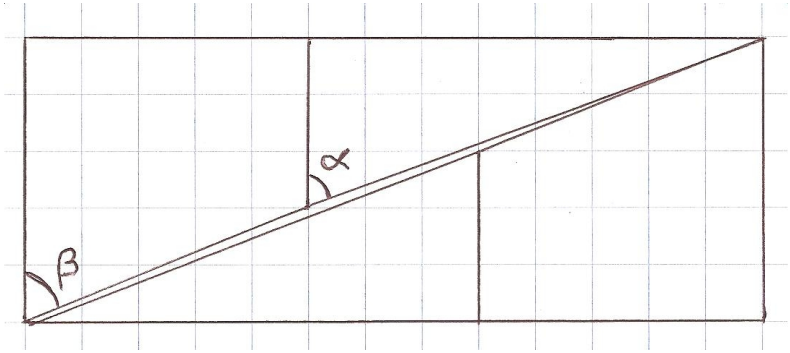


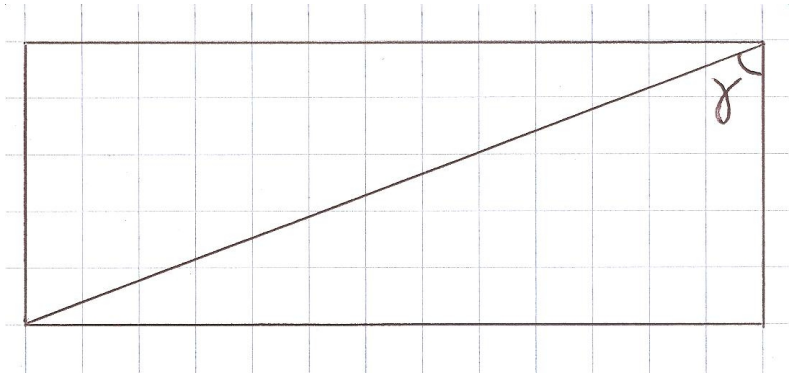
Le stesse prove sono state fatte anche con altre misure del lato del quadrato e in tutti i casi si è verificata una situazione analoga.

QUARTA OSSERVAZIONE: ci sono casi con un quadretto in più o in meno, altri in cui la differenza di quadretti è maggiore, altri in cui le parti si sovrappongono.

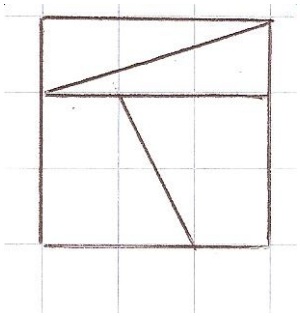
I QUADRATI "SPECIALI"

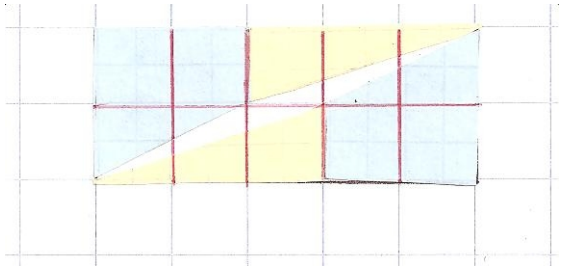
- Dopo aver osservato che per comporre il rettangolo partendo dalle quattro parti in cui è suddiviso il quadrato deve essere $x < y$, abbiamo selezionato i quadrati "speciali", cioè quelli il cui rettangolo associato ha un quadretto in + o in -
- In questi casi abbiamo calcolato $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan\gamma$





Lato quadrato = 3 cm

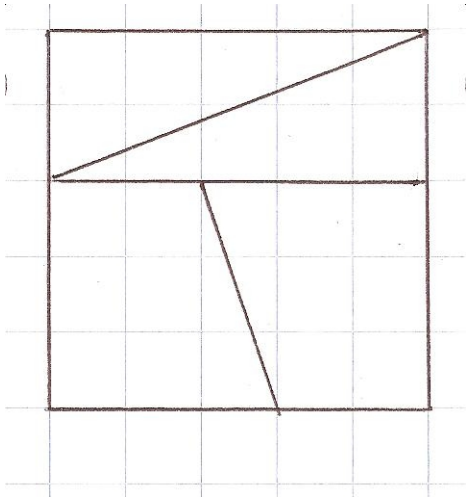


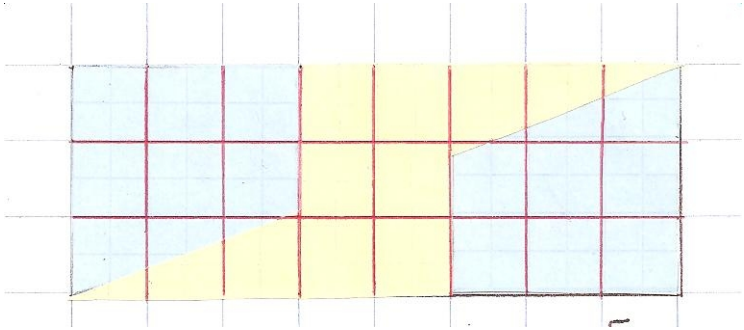


tanα	3
tanβ	2
tanγ	2,5

C’è un quadretto in PIÙ

Lato quadrato = 5 cm

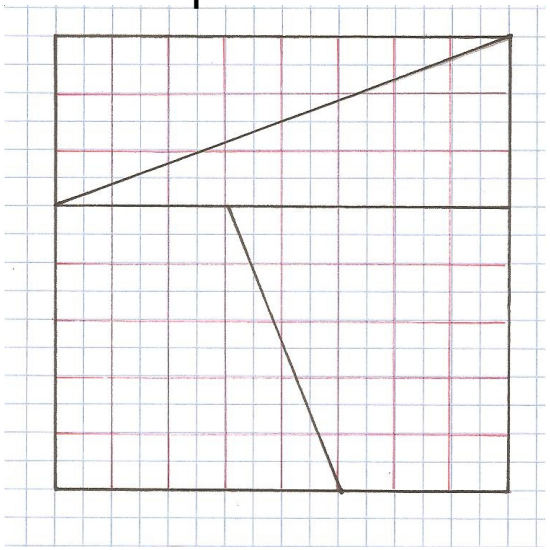


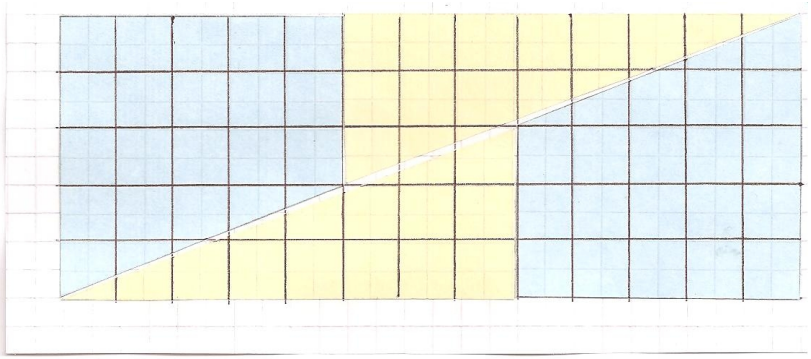


tanα	2,5
tanβ	3
tanγ	2,66..

C’è un quadretto in MENO

Lato quadrato = 8 cm



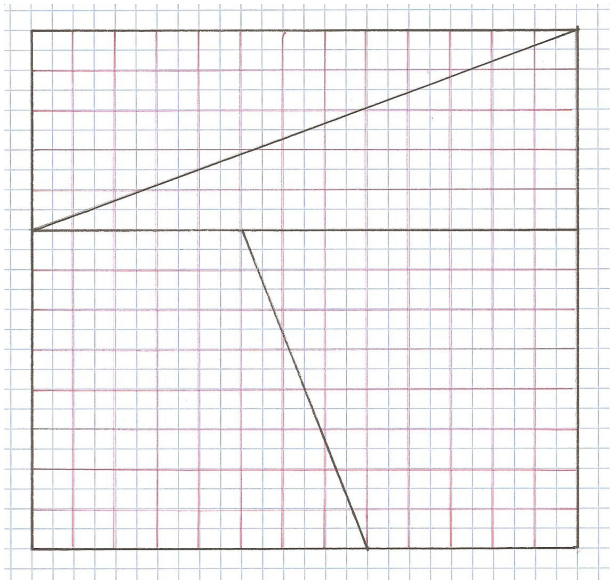


tanα	2,66…
tanβ	2,5
tanγ	2,6

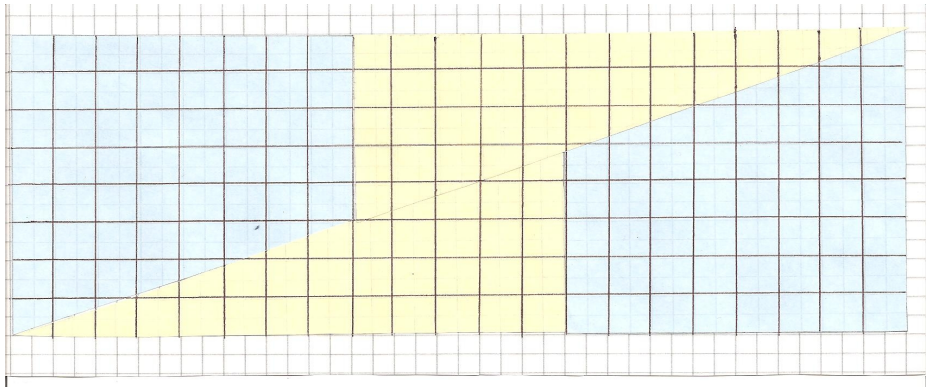
C’è un quadretto in PIÙ

tanα	2,6
tanβ	2,66…
tanγ	2,625

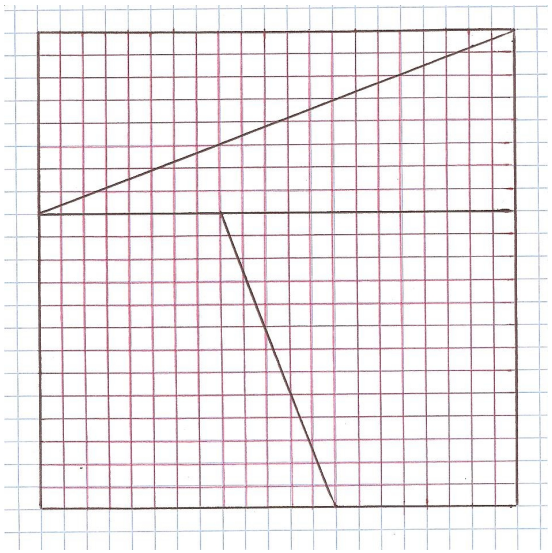
Lato quadrato = 13 cm

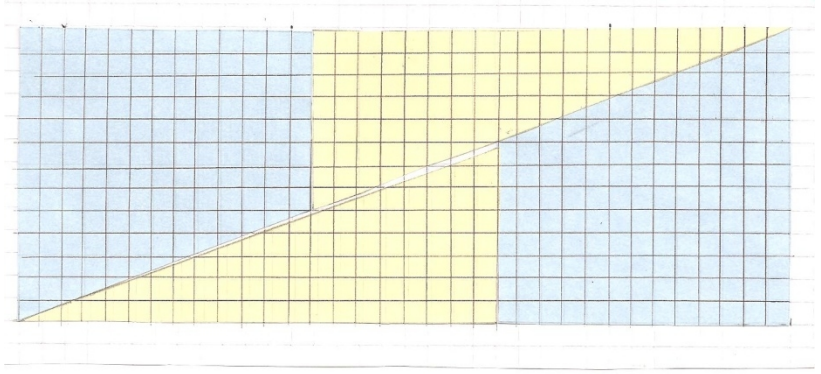


C’è un quadretto in MENO



Lato quadrato = 21 cm (le figure sono state rimpicciolite)

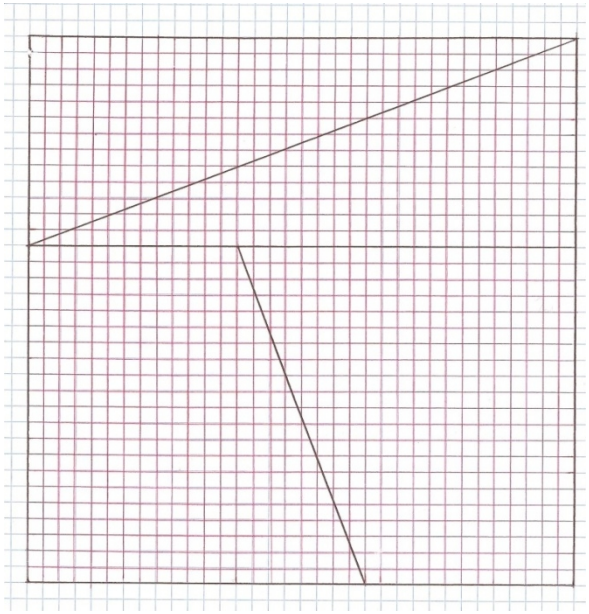




tanα	2,625
tanβ	2,6
tanγ	2,615

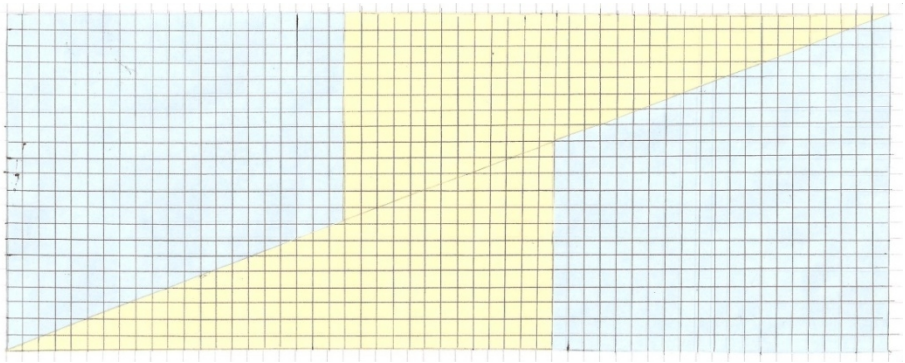
C’è un quadretto in PIÙ

Lato quadrato = 34 cm (le figure sono state rimpicciolite)



C’è un quadretto in MENO

tanα	2,61538461 ....
tanβ	2,625
tanγ	2,61907619 ...



Lato	tanα	tanβ	tanγ
3	3	2	2,5
5	2,5	3	2,666…
8	2,666…	2,5	2,6
13	2,6	2,666…	2,625
21	2,625	2,6	2,615
34	2,61538461…	2,625	2,6190761…

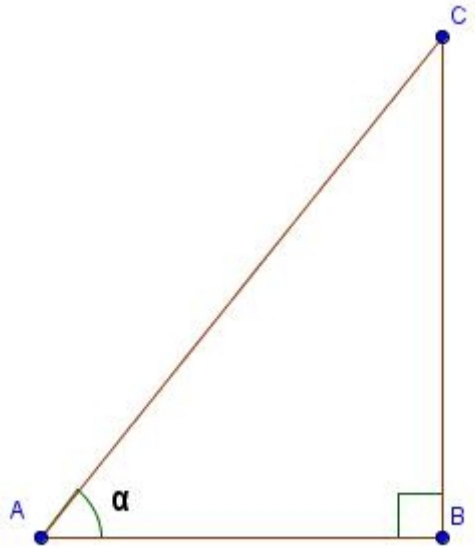
- tanγ è sempre un valore intermedio tra tanα e tanβ

- all'aumentare della misura del lato "l" del quadrato, i due valori tanα e tanβ si avvicinano sempre più a tanγ, quindi la diversità di inclinazione non è più così evidente

SPUNTI DI APPROFONDIMENTO

- La tangente di un angolo (ci ha permesso di ottenere l'inclinazione dei vari segmenti che ci interessavano e di confrontare queste inclinazioni)
- La similitudine (utilizzeremo il lavoro fatto quando in classe si parlerà di similitudine)
- La successione di Fibonacci (ci ha permesso di fare interessanti scoperte su questi numeri che abbiamo ottenuto partendo dal nostro problema geometrico)

La TANGENTE di un ANGOLO



Nel triangolo rettangolo ABC, chiamiamo tanα il rapporto tra la misura del cateto BC (opposto all'angolo α) e quella del cateto AB (adiacente all'angolo α):

$$\tan\alpha = BC : AB$$

La tangente dell'angolo α permette di determinare l'inclinazione dell'ipotenusa.

I numeri di FIBONACCI

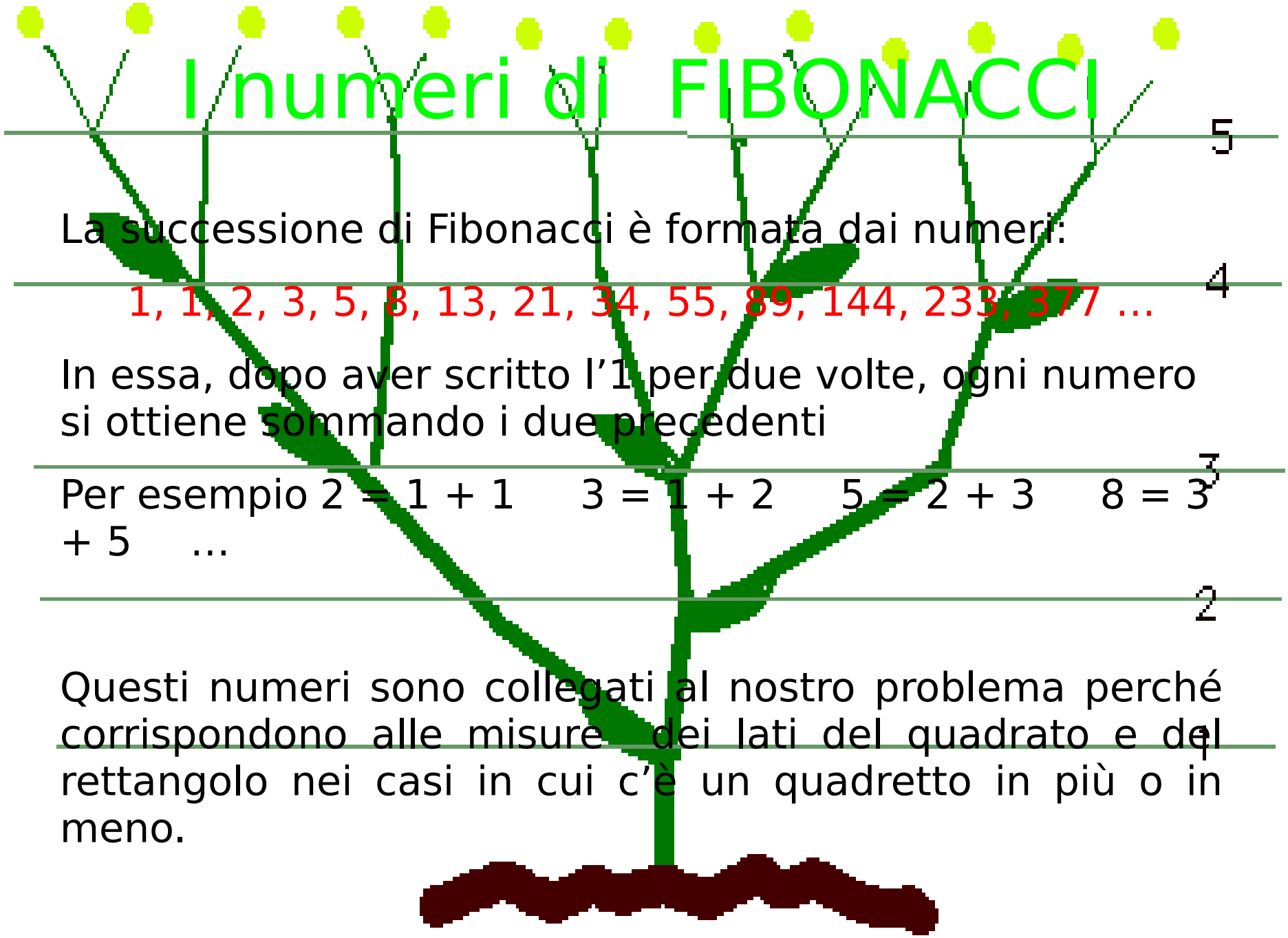
La successione di Fibonacci è formata dai numeri:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377 ...

In essa, dopo aver scritto l'1 per due volte, ogni numero si ottiene sommando i due precedenti

Per esempio 2 = 1 + 1 3 = 1 + 2 5 = 2 + 3 8 = 3 + 5 ...

Questi numeri sono collegati al nostro problema perché corrispondono alle misure dei lati del quadrato e del rettangolo nei casi in cui c'è un quadretto in più o in meno.



I numeri di Fibonacci sono “numeri speciali” perché presentano molte particolarità.

- Prendendo tre numeri successivi della successione di Fibonacci ci sono sempre un numero pari e due numeri dispari.

Questo avviene perché quando si sommano due numeri, vale la regola:

PARI + PARI = PARI

PARI + DISPARI = DISPARI + PARI = DISPARI

DISPARI + DISPARI = PARI

I primi due numeri della successione di Fibonacci sono dispari, quindi la loro somma sarà pari. Però il secondo e il terzo numero sono uno dispari e uno pari, quindi la loro somma sarà dispari. Proseguendo in questo modo ci si accorge che

OGNI DUE NUMERI DISPARI C’È UN NUMERO PARI

e i numeri pari, nella successione di Fibonacci, occupano la posizione il cui indice è un MULTIPLO DI 3:

$F_3 = 2$ $F_6 = 8$ $F_9 = 34$

e così via.

- Tra $(F_n)^2$, F_{n-1}, F_{n+1} esiste una particolare relazione:

$$(F_n)^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} \ (\pm 1)$$

e si usa +1 se n è dispari e -1 se n è pari.

Possiamo applicare questa relazione al nostro problema, dandone così un'interpretazione geometrica:

$(F_n)^2$ rappresenta il quadrato di lato uguale al numero di Fibonacci che occupa la posizione "n" (nel nostro caso n = 6 e lato del quadrato = 8)

F_{n-1} e F_{n+1} rappresentano le dimensioni del rettangolo che ha come base e come altezza i numeri di Fibonacci corrispondenti alla posizione n – 1 e n + 1 (nel nostro caso n - 1 = 5 e n + 1 = 7; lati rettangolo = 5 e 13)

Quindi

$(F_6)^2 = 8^2 = 64 = 5 \cdot 13 - 1 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} - 1$ (infatti n è pari)

· Abbiamo calcolato alcuni rapporti tra numeri di Fibonacci : $\frac{F_{n+1}}{F_n}, \frac{F_n}{F_{n+1}}, \frac{F_{n+2}}{F_n}, \frac{F_n}{F_{n+2}}$

e abbiamo ottenuto i seguenti valori:

Rap.	Val. rap.
F_2/F_1	1
F_3/F_2	2
F_4/F_3	1,5
F_5/F_4	1,6666...
F_6/F_5	1,6
F_7/F_6	1,625
F_8/F_7	1,61538...
F_9/F_8	1,619047..
F_{10}/F_9	1,617647..
F_{11}/F_{10}	1,618181...
F_{12}/F_{11}	1,617977..
F_{13}/F_{12}	1,618055...
F_{14}/F_{13}	1,618025...

Rap.	Val. rap.
F_1/F_2	1
F_2/F_3	0,5
F_3/F_4	0,6666...
F_4/F_5	0,6
F_5/F_6	0,625
F_6/F_7	0,615384...
F_7/F_8	0,619047...
F_8/F_9	0,617647...
F_9/F_{10}	0,618181...
F_{10}/F_{11}	0,617977...
F_{11}/F_{12}	0,618055..
F_{12}/F_{13}	0,618025...
F_{13}/F_{14}	0,618037..

Rap.	Val. rap.
F_3/F_1	2
F_4/F_2	3
F_5/F_3	2,5
F_6/F_4	2,666...
F_7/F_5	2,6
F_8/F_6	2,625
F_9/F_7	2,61538...
F_{10}/F_8	2,619047...
F_{11}/F_9	2,617647...
F_{12}/F_{10}	2,618181...
F_{13}/F_{11}	2,617977...
F_{14}/F_{12}	2,618055...
F_{15}/F_{13}	2,618025...

Rap.	Val. rap.
F_1/F_3	0,5
F_2/F_4	0.333...
F_3/F_5	0.4
F_4/F_6	0.375
F_5/F_7	0.384615...
F_6/F_8	0,380952...
F_7/F_9	0,382352...
F_8/F_{10}	0,381818...
F_9/F_{11}	0,382022...
F_{10}/F_{12}	0,381944...
F_{11}/F_{13}	0,381974...
F_{12}/F_{14}	0,381962...
F_{13}/F_{15}	0,381967...

Si può notare che in questi rapporti alcune cifre, da un certo punto in poi si ripetono. Per esempio considerando la prima tabella si ottiene:

la cifra 1 (delle unità) dalla posizione 3
la cifra 6 (dei decimi) dalla posizione 4
la cifra 1 (dei centesimi) dalla posizione 7
la cifra 8 (dei millesimi) dalla posizione 12
la cifra 0 (dei decimillesimi) dalla posizione 12

Otteniamo così il numero 1,61803398... che è la

SEZIONE AUREA

La SEZIONE AUREA è un numero che si ritrova molte volte in natura e nell'arte (veniva considerato un "numero divino").
E' considerato la giusta proporzione tra due elementi perché appaiono armoniosi all'occhio.

$$\Phi = 1{,}61803398\ldots$$

Valgono anche le seguenti relazioni:

$1/\Phi = \Phi - 1$ $\Phi^2 = \Phi + 1$ $1/\Phi + 2 = \Phi + 1$

Φ è l'unico numero reale positivo per il quale valgono queste relazioni.

I valori della terza tabella della diapositiva 30 coincidono con la tangente di γ calcolata nel nostro problema

Se calcoliamo le seguenti somme:

$$(F_1)^2 = 1^2 = 1$$
$$(F_1)^2 + (F_2)^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$$
$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + (F_4)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$$
...

Proseguendo in questo modo, si arriva al caso generale :

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + \ldots + (F_n)^2 = F_n F_{n+1}$$

Possiamo dare un'interpretazione geometrica a questa uguaglianza:

il rettangolo che ha come lati due numeri consecutivi "n" e "n+1" della successione di Fibonacci può essere "riempito" con quadrati che hanno come lato tutti i numeri della successione di Fibonacci fino a "n".
Inoltre, disegnando opportunamente questi quadrati siamo riusciti a costruire la forma del guscio della chiocciola (il Nautilus) una conchiglia nella quale è possibile trovare il valore della sezione aurea.

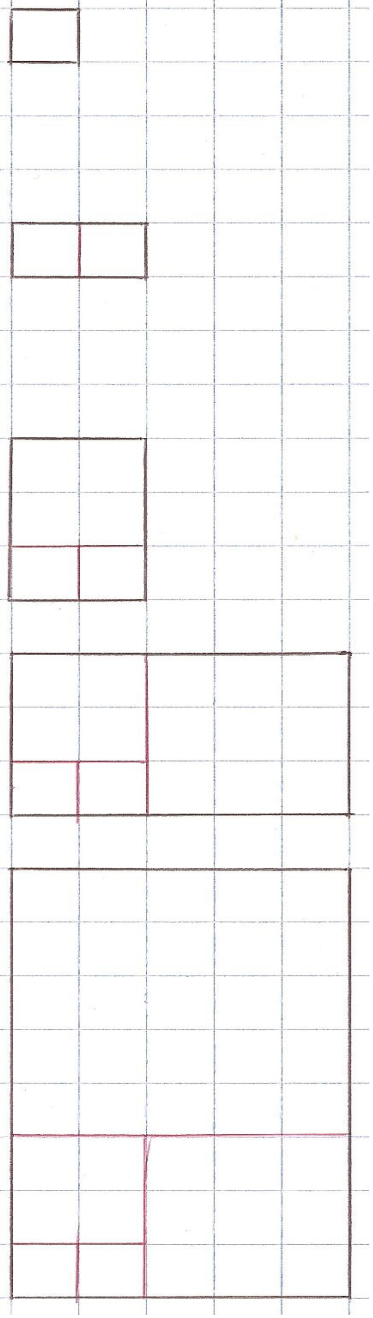
$$\begin{cases} F_1^2 = 1^2 = 1 \\ F_1 \cdot F_2 = 1 \cdot 1 = 1 \end{cases}$$

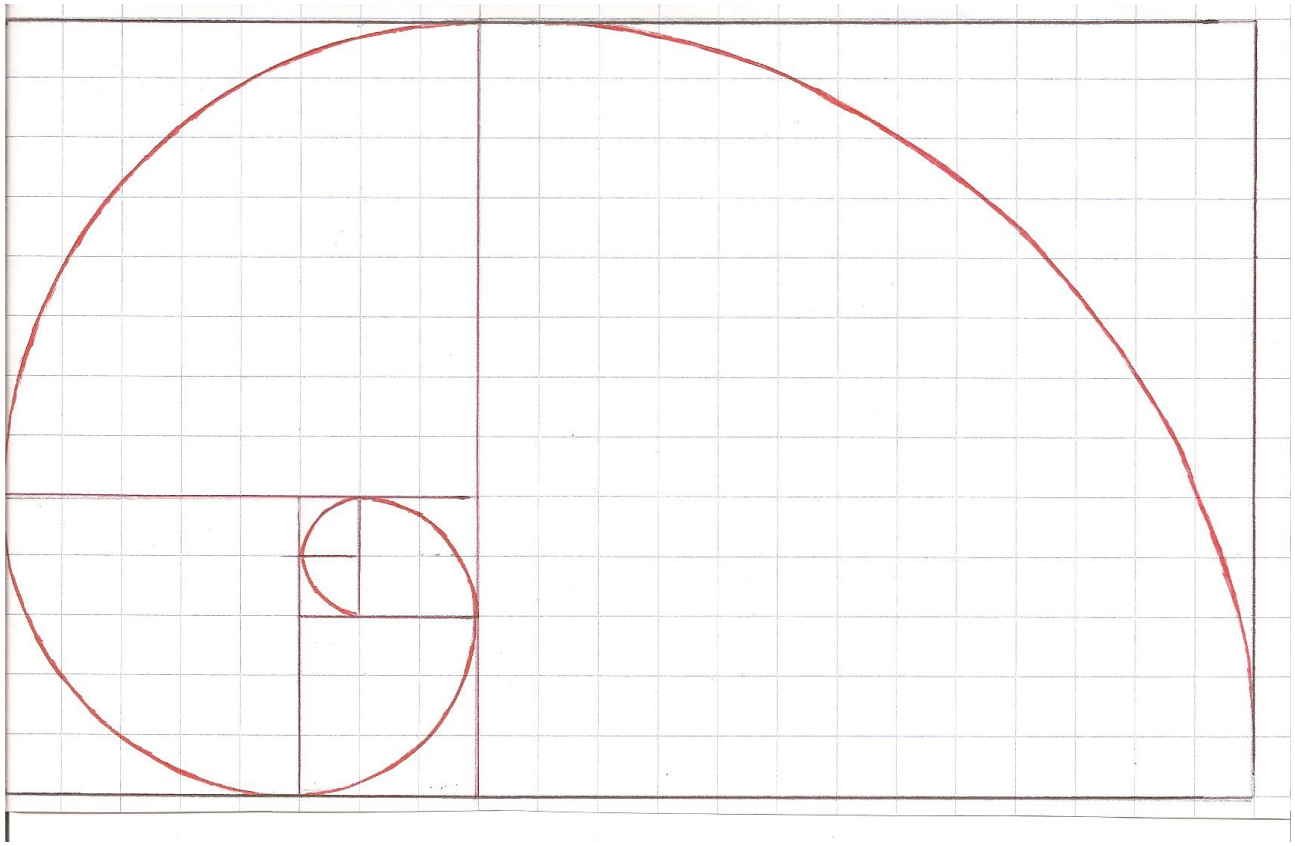
$$\begin{cases} F_1^2 + F_2^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \\ F_2 \cdot F_3 = 1 \cdot 2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 \\ F_3 \cdot F_4 = 2 \cdot 3 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15 \\ F_4 \cdot F_5 = 3 \cdot 5 = 15 \end{cases}$$

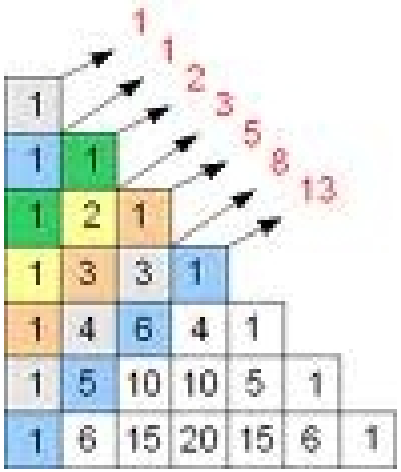
$$\begin{cases} F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = \\ \qquad = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40 \\ F_5 \cdot F_6 = 5 \cdot 8 = 40 \end{cases}$$

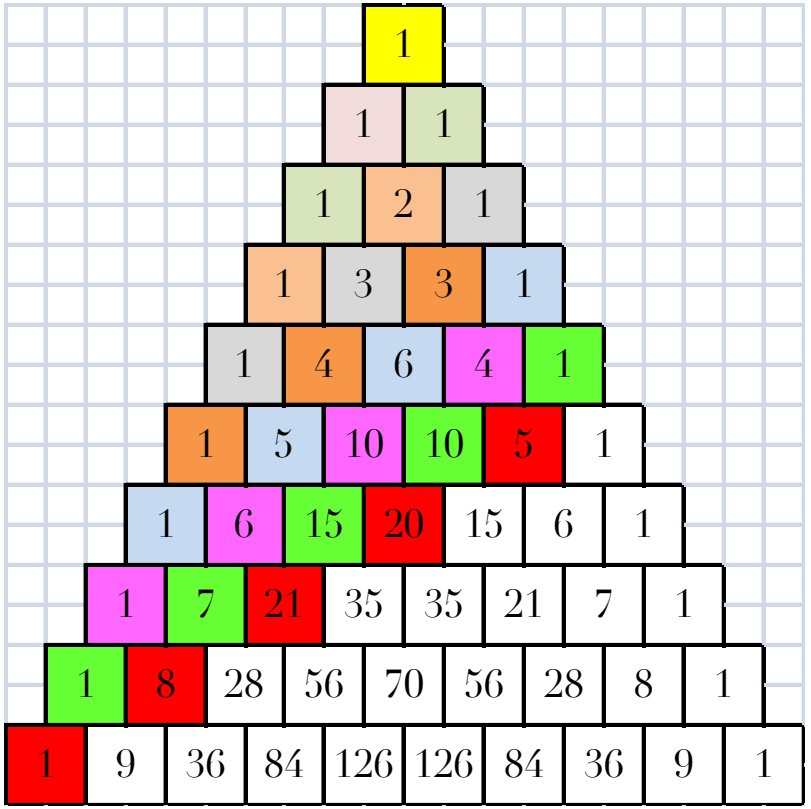


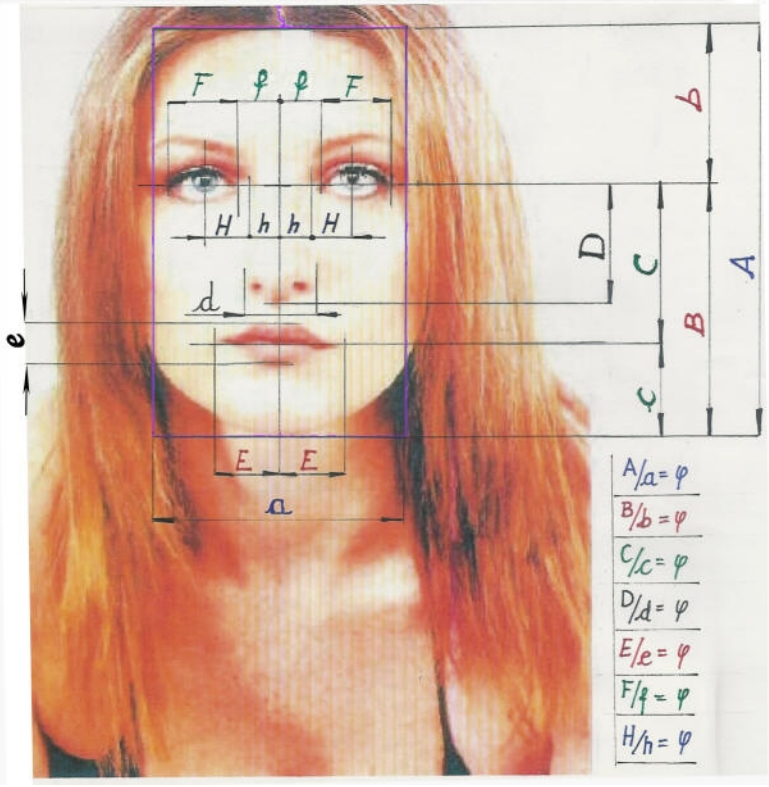
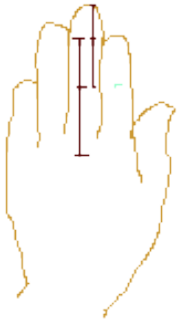
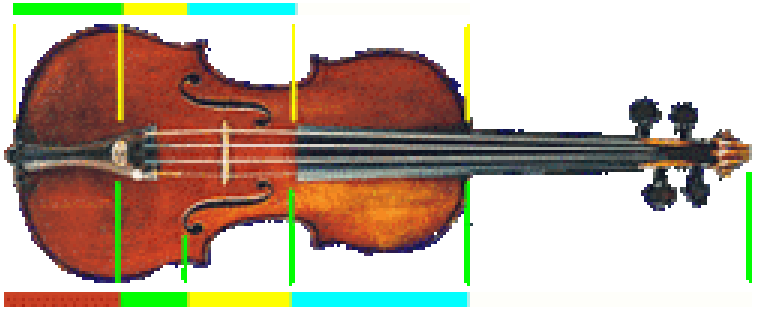


Il TRIANGOLO di TARTAGLIA

È un particolare triangolo nel quale i numeri di una riga, dopo aver messo l'1 iniziale, si ottengono sommando a coppie i numeri della riga superiore e mettendo poi l'1 finale. In esso possiamo ritrovare i numeri di Fibonacci seguendo le diagonali colorate e sommando i termini che le compongono.






F
f
f
F
H
h
h
H
d
e
D
C
B
A
b
c
E
E
a
A/a = φ
B/b = φ
C/c = φ
D/d = φ
E/e = φ
F/f = φ
H/h = φ