

Riga e compasso

Alcuni terreni coltivati, di forma quadrangolare, devono essere espropriati per far passare un'autostrada. Ai contadini verranno dati, in cambio, dei terreni con la stessa forma e la stessa superficie, che devono essere ricavati da un unico terreno quadrato più grande. Come si devono disporre i terreni nel lotto quadrato?

Istituto Comprensivo "A. Diaz" - Meda (MB):

Classe: II E

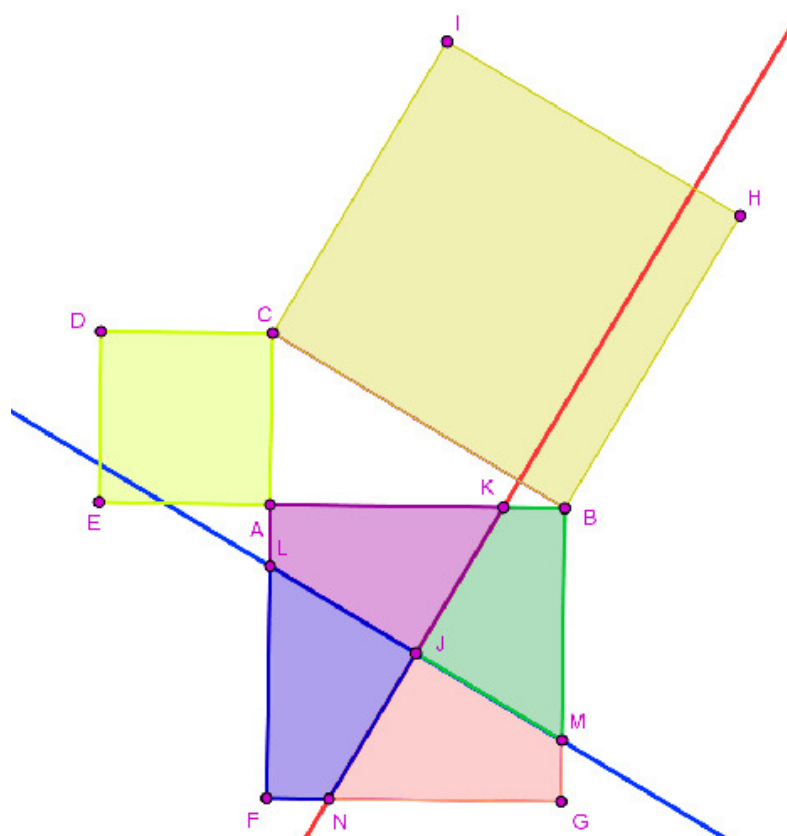
Insegnante di riferimento: prof.ssa Nunzia Villa

Ricercatore: Alessandro Cattaneo

Partecipanti: Serena Benetti, Giorgio Borgonovo, Samuele Luchetti, Cecilia Panzeri, Martina Rivolta, Gala Romagnoli, Margherita Terenghi, Alessio Vender

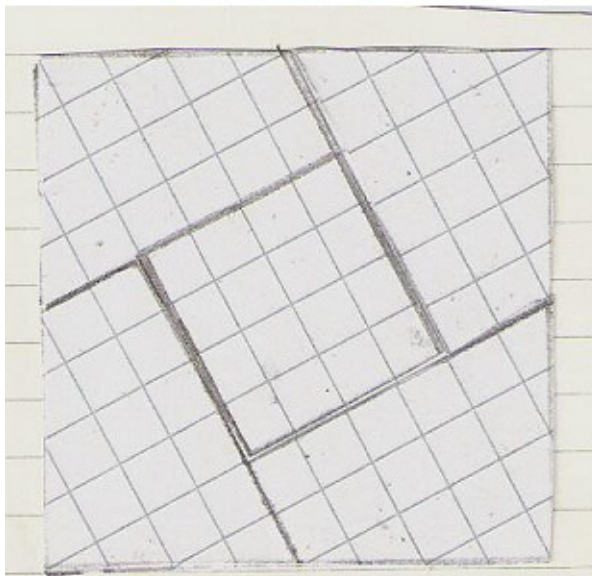
Si comincia con il disegnare la situazione di cui si parla

Tracciando le diagonali, si individua il centro del quadrato costruito sul cateto maggiore (J nel disegno); da J si traccia la perpendicolare a [CB], si mettono in evidenza i punti di intersezione della perpendicolare con i lati del quadrato individuando [NK]; si traccia la perpendicolare per J a [NK], si mettono in evidenza i punti di intersezione della perpendicolare con i lati del quadrato individuando [LM].



Si suddivide il quadrato costruito sull'ipotenusa

Una nostra compagna, Margherita, ha ritagliato le diverse figure e le ha inserite nel quadrato più grande ottenendo questa struttura.



Alessandro ha definito la struttura un “oracolo” e ci ha spiegato che ogni affermazione deve essere dimostrata. Il nostro percorso è iniziato così; con il passare del tempo ci siamo resi conto che avremmo dovuto dimostrare la verità di tutto e così, dopo aver trovato aspetti interessanti utilizzando *geogebra* e un reticolato di riferimento, ci siamo decisi a impostare un piccolo bagaglio di costruzioni e dimostrazioni utili al lavoro.

Le costruzioni

L'ordine delle costruzioni è importante, le prime sono la base per le seguenti.

1. Condurre la perpendicolare ad un segmento nel suo punto medio (*Fig.1*)
2. Tracciare la perpendicolare a una retta per un punto (*Fig.2*)
3. Tracciare la parallela ad una retta passante per un punto (*Fig.3*)
4. Trasportare un segmento (*Fig.4*)

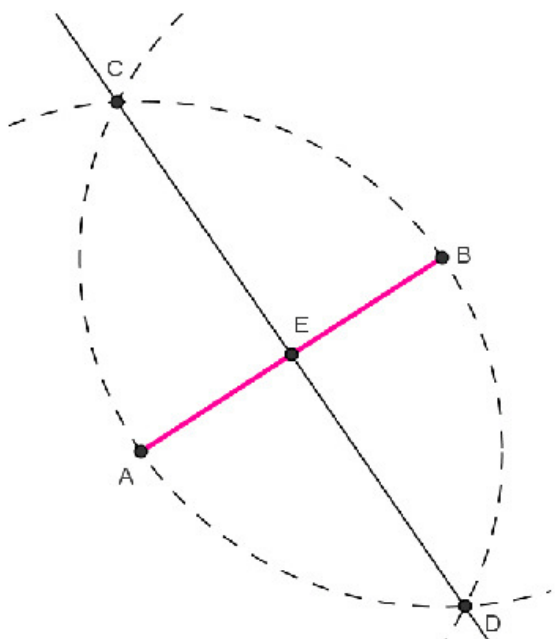


Fig.1

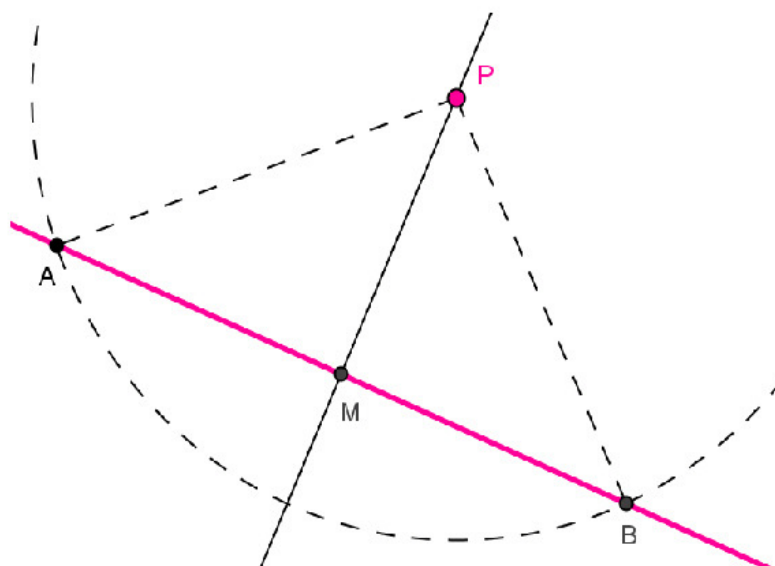


Fig.2

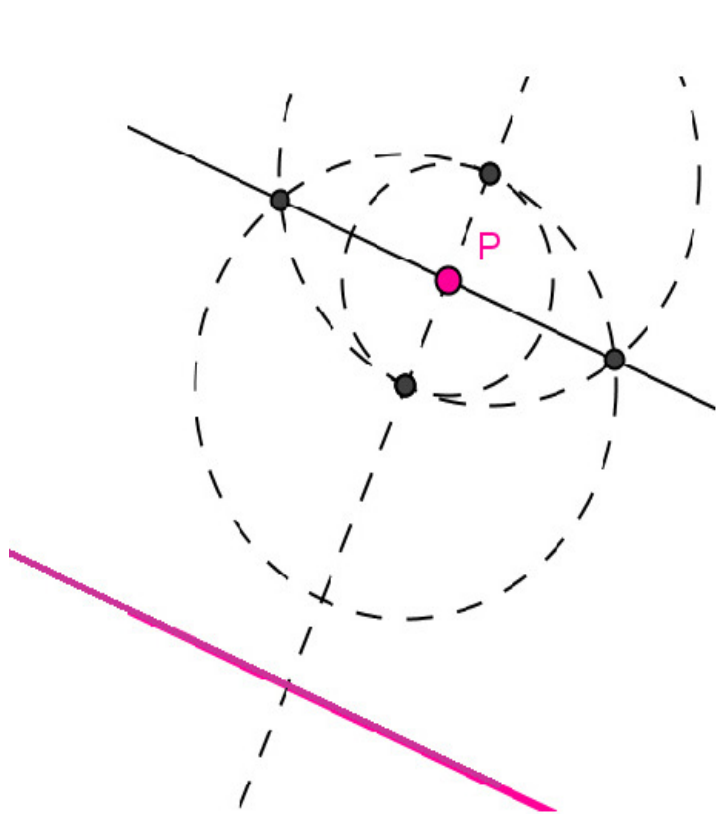


Fig.3

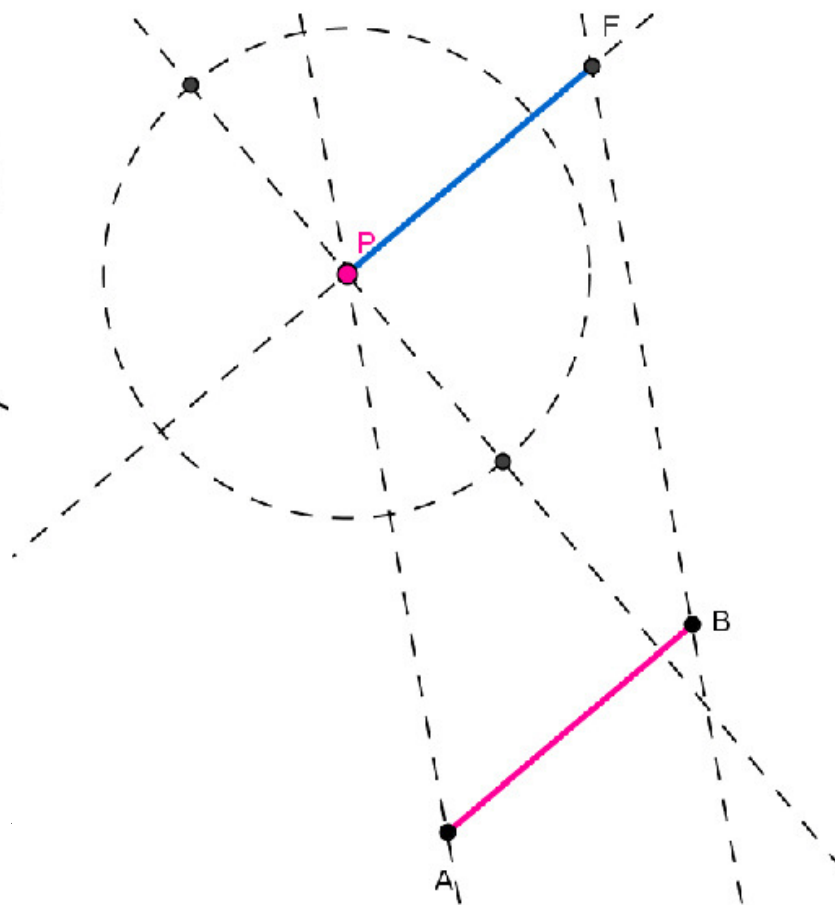
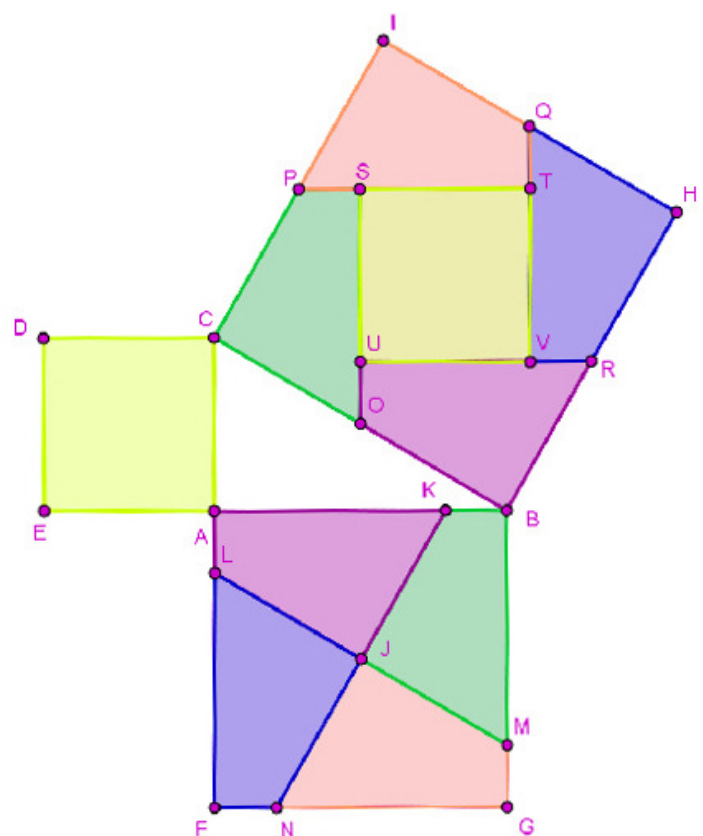
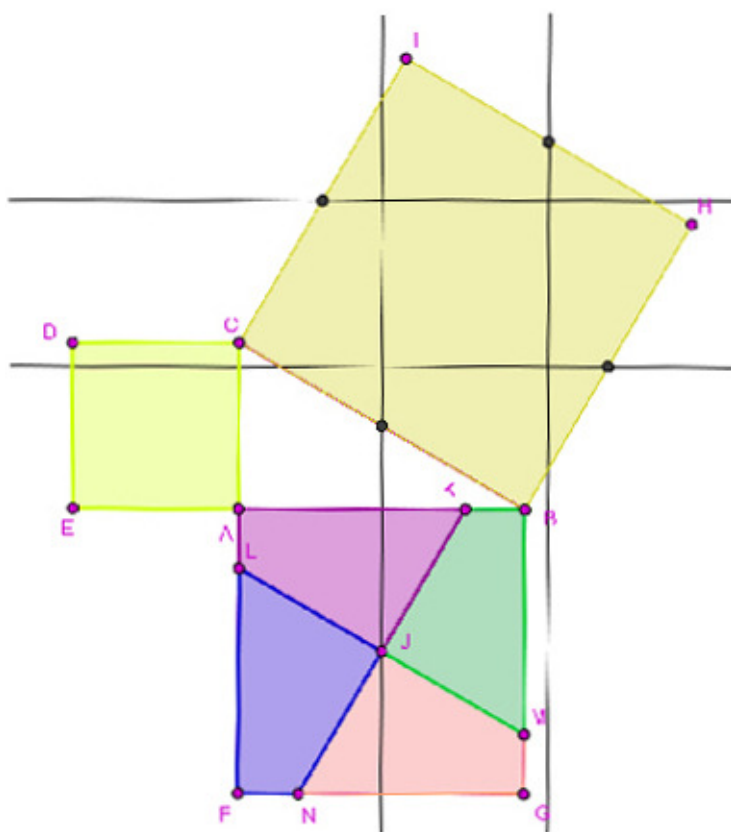


Fig.4

Osservando "l'oracolo" di Margherita, abbiamo visto che i segmenti che suddividono il quadrato grande partono dai punti medi dei lati. Inserendo questa struttura nel disegno completo si nota che i segmenti sono paralleli ai lati del quadrato medio, o ai lati del quadrato piccolo.



Utilizzando le costruzioni 1 (per la determinazione del punto medio) e 3, siamo così riusciti a suddividere il quadrato grande. Si tratta ora di dimostrare la congruenza delle figure.

Le dimostrazioni

Oltre alle costruzioni, sono state utilizzate le seguenti dimostrazioni:

- un quadrilatero con lati opposti e paralleli è un parallelogramma (*Fig.5*);
- $[LJ] = [JM] = [NJ] = [JK]$ (*Fig.6*);
- $[LM] = [NK] = [CB]$ (*Fig.7*);
- $[LA] = [UO]$ (*Fig.8*);
- $[VR] = [KB]$ (*Fig.9*).

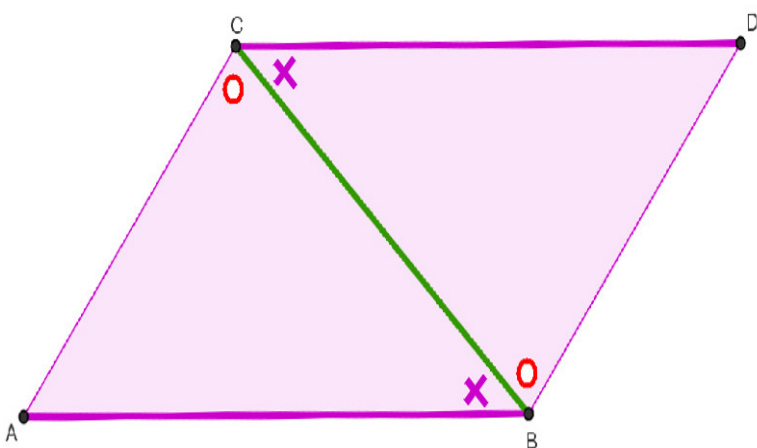


Fig.5

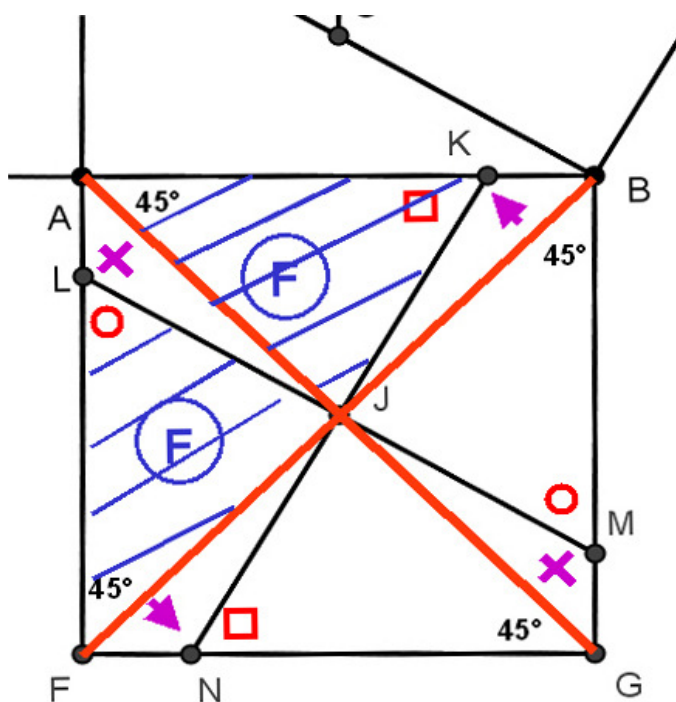


Fig.6

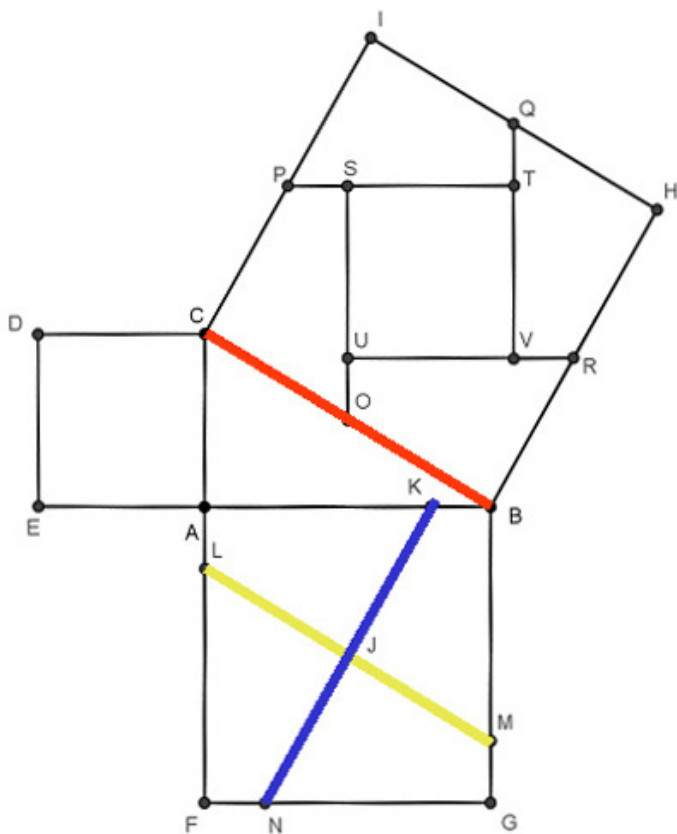


Fig.7

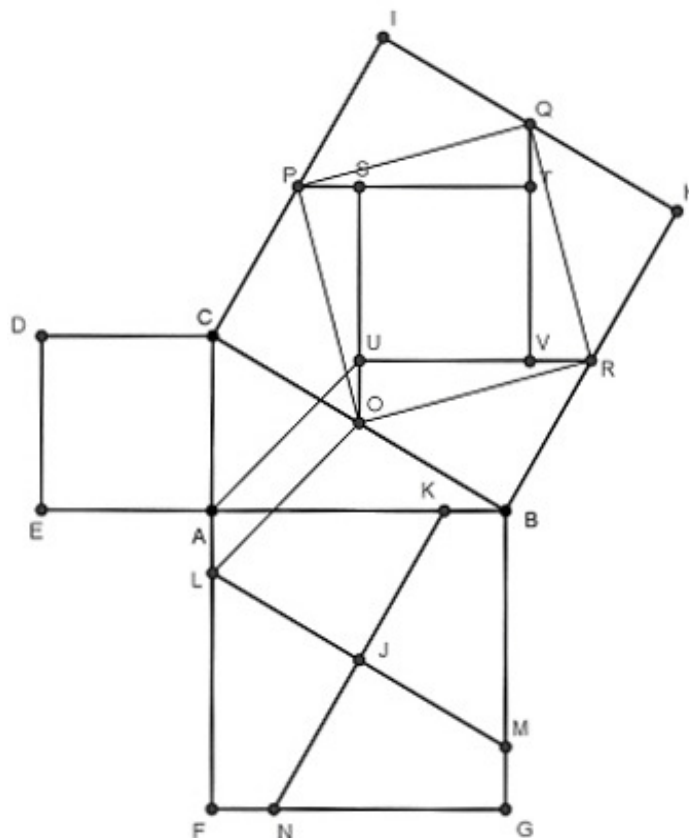


Fig.8

Le isometrie e i due percorsi

Nel nostro lavoro abbiamo utilizzato due percorsi, in ognuno dei quali sono state prese in considerazione le isometrie. Ma perché utilizzare isometrie?

In prima, studiando i poligoni abbiamo visto che i triangoli sono indeformabili, ma i quadrilateri no. Per dimostrare la congruenza di quadrilateri non basta quindi dimostrare la congruenza dei lati corrispondenti, ma bisogna dimostrare anche la congruenza di almeno una coppia di angoli corrispondenti.

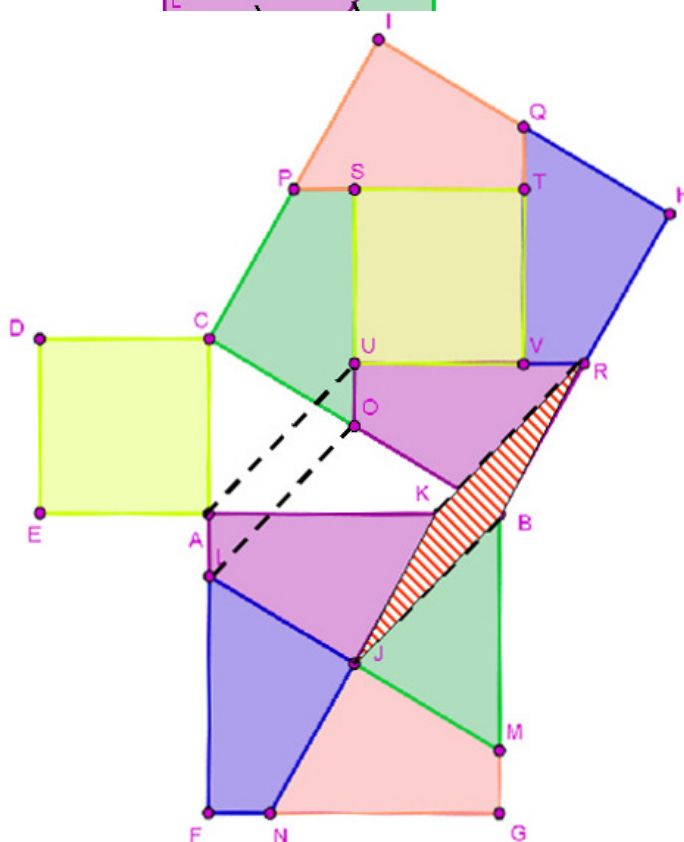
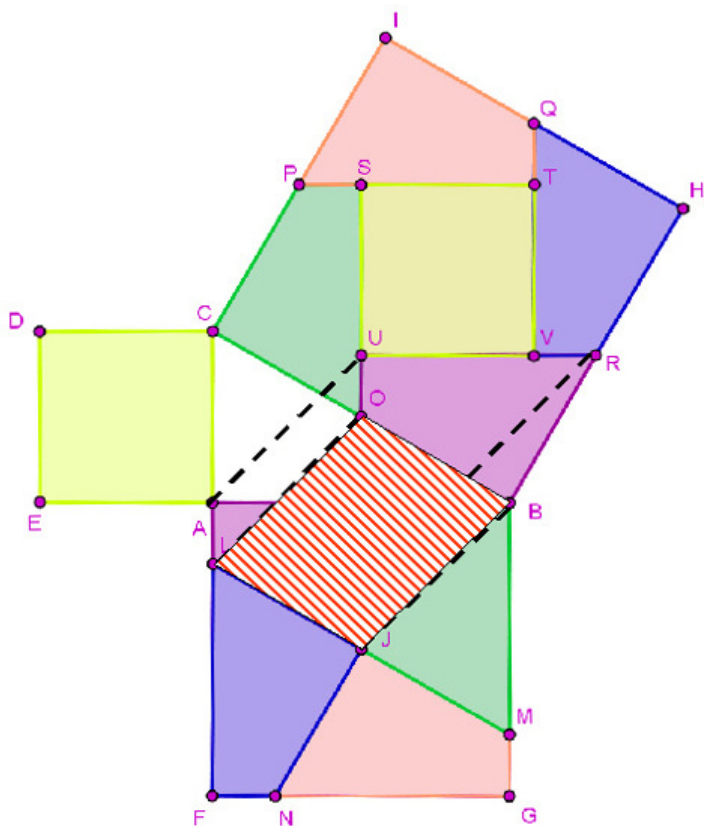
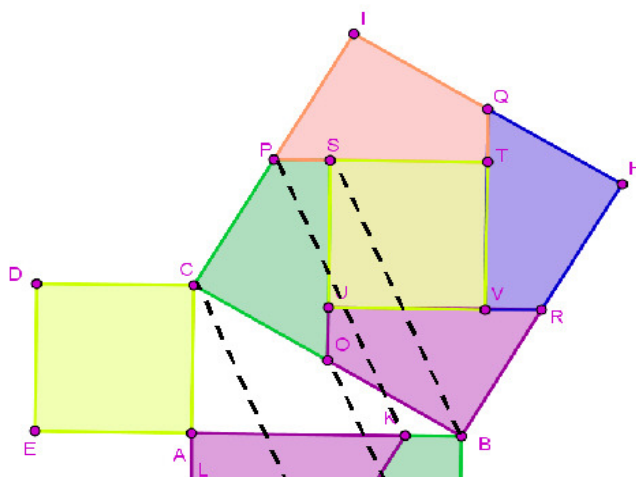
Per evitare di dimostrare la congruenza di angoli abbiamo:

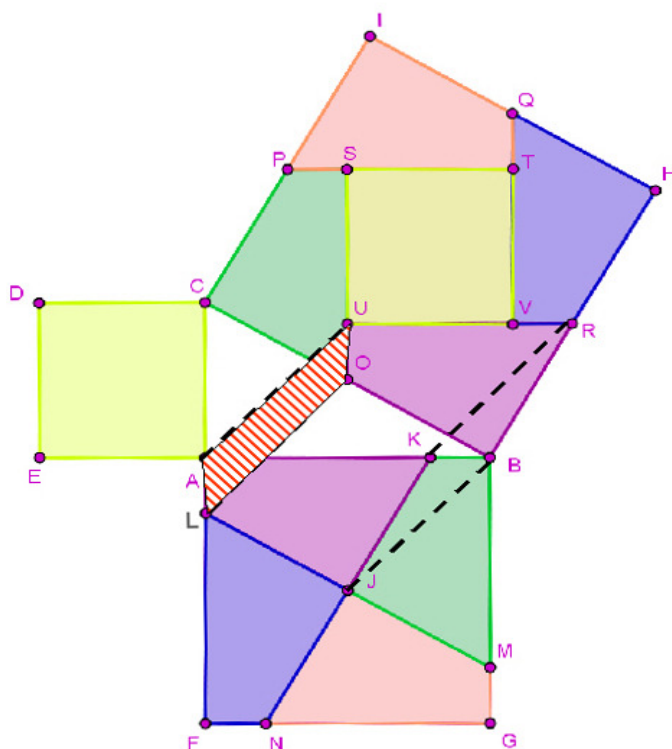
1. dimostrato la presenza di isometrie che trasformano una figura in un'altra congruente (primo percorso);
2. utilizzato isometrie per ottenere un quadrato congruente a quello costruito sull'ipotenusa (secondo percorso).

Il primo percorso

La congruenza dei quadrangoli

Nel primo percorso abbiamo dimostrato che le figure individuate nel quadrato costruito sull'ipotenusa corrispondono alla traslazione dei quadrilateri che costituiscono il quadrato costruito sul cateto maggiore e il quadrato costruito sul cateto minore.





Facendo riferimento alle costruzioni e alle dimostrazioni preliminari abbiamo dimostrato che i quadrilateri: LJBO, JBRK, ALOU sono parallelogrammi.

Di conseguenza:

$$[AU] = [LO] = [JB] = [KR],$$

e

$$[AU] \parallel [LO] \parallel [JB] \parallel [KR],$$

dunque gli stessi segmenti sono i vettori che trasformano il quadrangolo LJKA nel quadrangolo OBRU.

Nello stesso modo si dimostra la congruenza di tutti i quadrangoli presenti nel quadrato costruito sul cateto maggiore e nel quadrato costruito sull'ipotenusa.

La congruenza dei quadrati

In seguito abbiamo dimostrato che il quadrato costruito sul cateto minore è congruente al quadrato presente nel quadrato grande, cioè che EACD e UVTS sono congruenti.

Infatti, come già dimostrato: $[UR] = [AK]$, $[VR] = [KB]$, e $[AK] - [KB] = [AC]$, quindi $[UV] = [AC]$ (lo stesso vale per tutti i lati di UVTS).

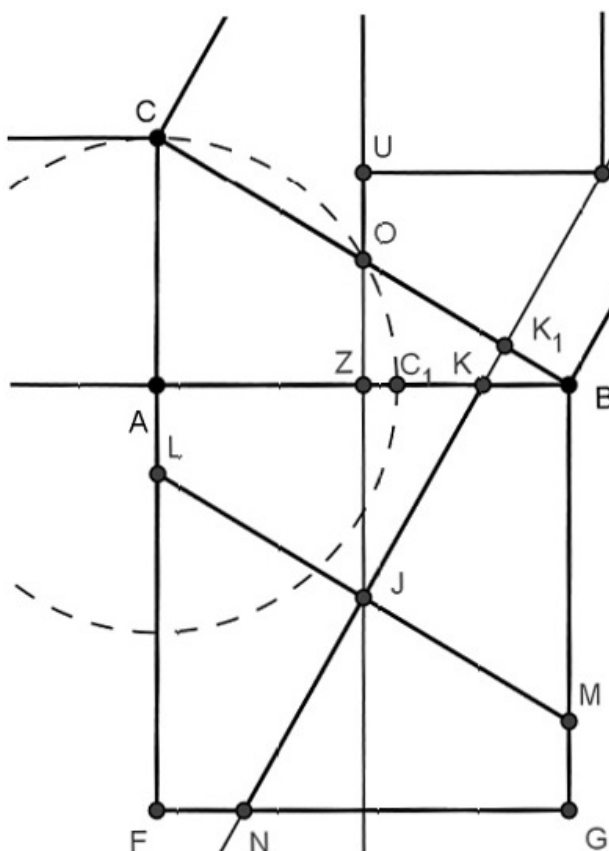
Inoltre si ha che, per costruzione, $US \parallel TV \parallel AC$, e $ST \parallel UV \parallel AB$; quindi gli angoli di UVTS sono tutti retti.

Il quadrato costruito sull'ipotenusa è quindi formato da figure congruenti ai quadrilateri che costituiscono il quadrato costruito sul cateto maggiore e il quadrato costruito sul cateto minore.

Il punto K: un punto particolare

Il punto K, individuato dalla costruzione sul cateto maggiore, è un punto particolare. Serena, osservando il disegno inserito in un reticolato, si è accorta che la somma dei due segmenti in cui è diviso il cateto maggiore da K, dà logicamente il cateto maggiore, ma che la differenza tra i due segmenti corrisponde al cateto minore. Il problema consiste nel dimostrare che questo è sempre vero.

Se togliendo da $[AK]$, $[KB]$, si ottiene $[AC]$, K dovrebbe essere il punto medio di $[C_1B]$.



La dimostrazione

Mettiamo in evidenza le rette di sostegno di [NK] e [SO], e prendiamo in considerazione i triangoli JKZ e ZOB. Questi triangoli sono congruenti perché:

- hanno gli angoli congruenti;
- $[JK] = [OB]$.

Inoltre si ha che $[AC] = 2[OZ]$ (per similitudine di rapporto 2 tra ACB e OZB), quindi $[AC] = 2[ZK]$.

$$[C_1K] = [AB] - [KB] - [AC_1],$$

$$[C_1K] = 2[ZB] - ([ZB] - [ZK]) - 2[ZK],$$

$$[C_1K] = 2[ZB] - [ZB] + [ZK] - 2[ZK],$$

$$[C_1K] = [ZB] - [ZK],$$

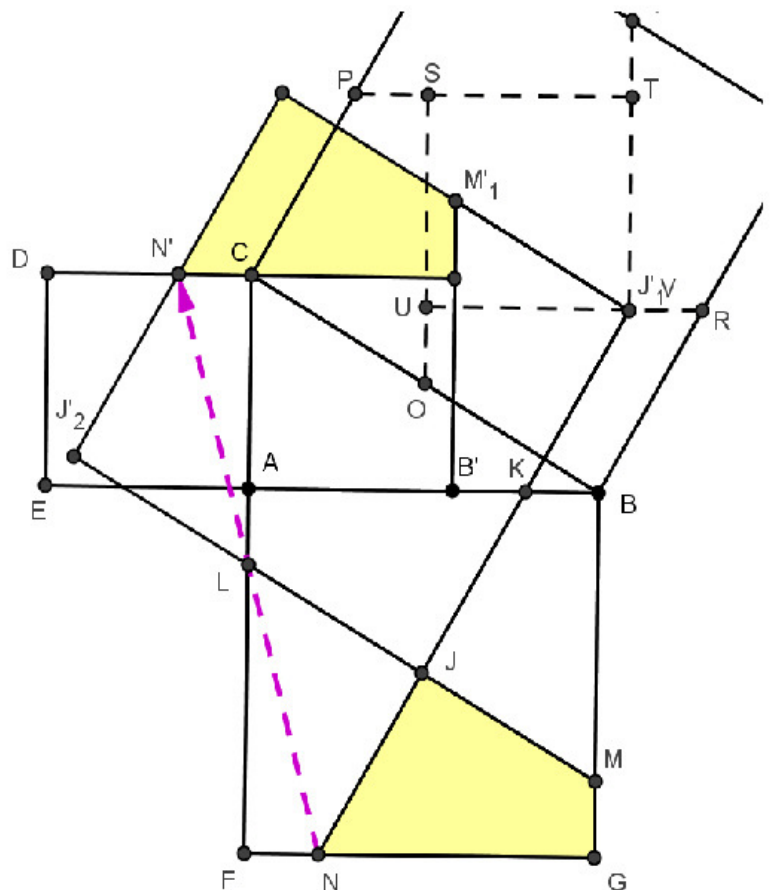
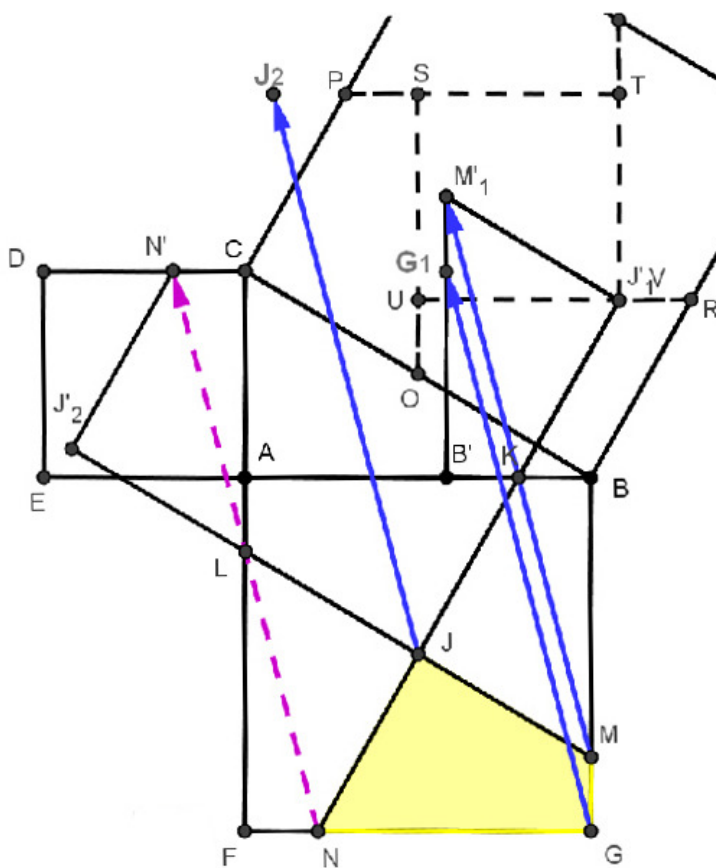
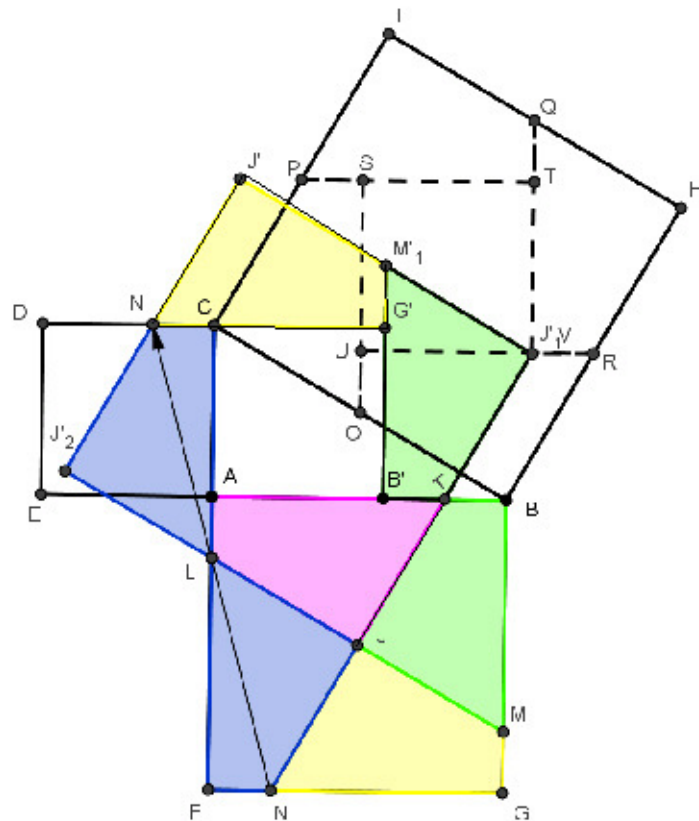
$$[C_1 K] = [KB].$$

Il secondo percorso

Con il secondo percorso i quadrilateri che costituiscono il quadrato costruito sul cateto maggiore e il quadrato costruito sul cateto minore sono stati spostati utilizzando isometrie ed è stato ottenuto un quadrato congruente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

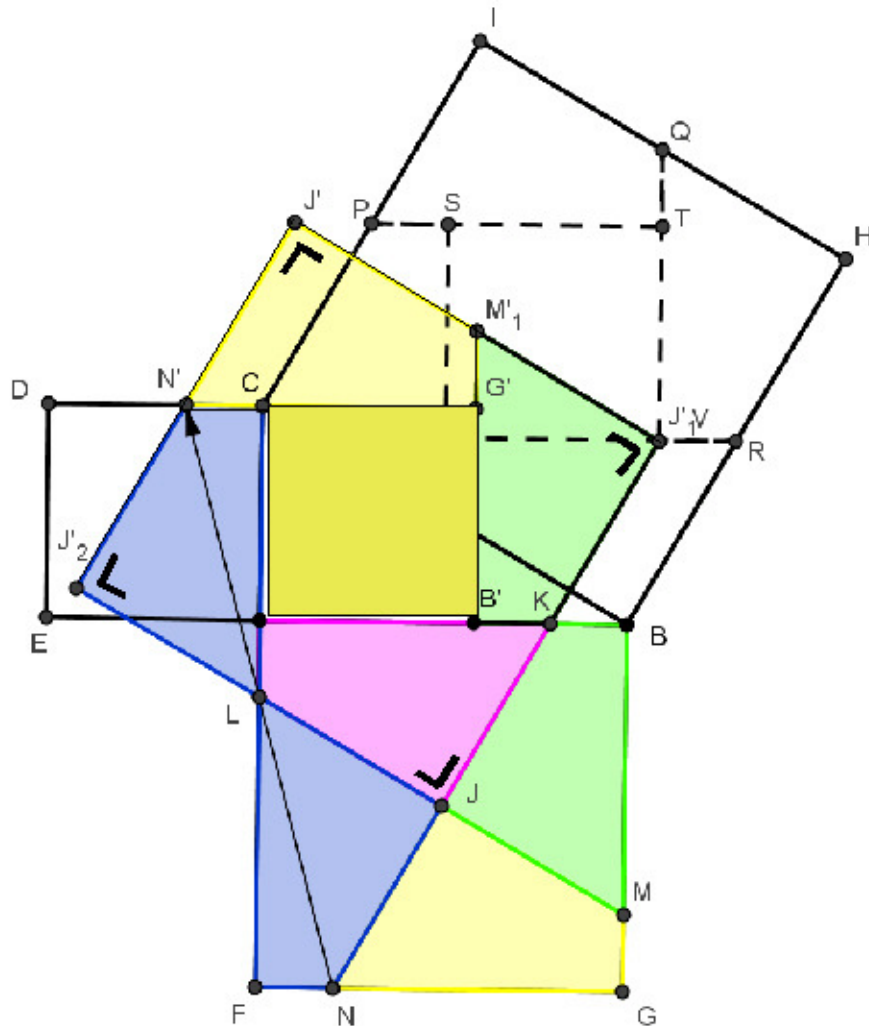
Le figure sono state trasformate utilizzando traslazioni. I vettori, tracciato il primo, sono stati ottenuti con la costruzione "trasporto di segmento".

Il quadrato costruito sul cateto minore si trasforma con una simmetria assiale di asse AC.



Dopo aver spostato le figure resta da dimostrare che il quadrato ottenuto è congruente al quadrato costruito sull'ipotenusa. Questo è vero perché:

- gli angoli con vertice in J'_2 , J'_1 , J' sono retti, perché traslazione degli angoli con vertice in J (retti per costruzione);
- i lati sono congruenti ai segmenti LM e NK a loro volta congruenti ai lati di $CBHI$.



Questo, in sintesi, è stato il nostro lavoro. Un saluto a tutti!

Gli alunni di seconda E, IC Diaz Meda