Sottrazioni casuali?

Durante una riunione tra i programmatori della Technological Dreams *per lo sviluppo di un nuovo software matematico, emerge un grosso problema: come è possibile generare numeri casuali con un numero stabilito di cifre?*

Scuola secondaria di I grado "Monteverdi-Colorni" - Milano (MI)
Classi II G – II B
Insegnanti di riferimento: prof.ssa Barbara Benedetti, prof.ssa Giovanna Gussoni
Ricercatore: dott. Alexandro Redaelli
Partecipanti: Diletta Abbondanza, Francesco Addisi, Gabriele Alicino, Kevin Bai, Cecilia Borò, Sophiah Calderon, Yefrim Flores, Lorenzo Invidia, Anaïs Landriscina, Eleonora Lombardi, Matteo Mainieri, Micol Majori, Emanuele Morello, Giulia Orlandini, Marco Riccardi, Yuri Rocca, Miguel Rodriguez, Sara Russo, Andrea Strigaro, Milani Julie Tandoc, Tommaso Zattarin, Ilaria Zocco

Un programmatore propone di utilizzare questa serie di operazioni:

- Passo 1 - si sceglie un numero naturale di partenza composto da *n* cifre (per esempio 2 cifre).
- Passo 2 - si scrive il numero scelto con le cifre in ordine decrescente.
- Passo 3 - si scrive il numero scelto con le cifre in ordine crescente.
- Passo 4 - si sottrae il numero scritto al passo 2 con quello scritto al passo 3 trovando un primo numero casuale.
- Passo 5 - si riparte dal passo 2 con il numero casuale trovato al passo 4 per trovare altri numeri casuali.

Secondo voi questo metodo per generare numeri casuali sarà efficace oppure riserva delle sorprese?

Alla fine di novembre, abbiamo incontrato per la prima volta il ricercatore che ci ha seguito nella nostra avventura di MATh.en.JEANS, il dottor Alexandro Redaelli. Eravamo piuttosto incuriositi da quanto ci avevano raccontato le nostre professoresse ed i compagni della II B, che avrebbero lavorato con noi e che avevano già partecipato l'anno precedente a questa iniziativa. Al primo incontro, Alexandro ci ha proposto due problemi: uno sulle *cyberscimmiette* perdute e uno sulle sottrazioni casuali. La prima sensazione è stata un misto tra il disorientamento per le richieste e l'impressione di aver già risolto tutto con pochi tratti di matita e qualche operazione. Ma poi…

All'attività è stata destinata un'ora alla settimana: quasi tutti i giovedì, divisi in gruppi da quattro, abbiamo lavorato fino ad aprile.
In ogni gruppo tutti dovevano tenere un diario del lavoro svolto e delle osservazioni fatte e uno si è incaricato di redigere le relazioni con i risultati trovati e le domande da trasmettere ad Alexandro sul forum.
Durante questo periodo, abbiamo incontrato Alexandro altre due volte: ci ha suggerito come organizzare ciò che abbiamo trovato e ci ha dato spunti per proseguire.

Proviamo a lavorare con numeri di 2 cifre

Abbiamo cominciato prendendo un numero con due cifre uguali, ad esempio il numero 55: 55–55=0, o il numero 66: 66-66=0. Ma era inutile andare avanti perché scambiando le cifre il numero è sempre lo stesso e il risultato è sempre 0, quindi **non si generano numeri casuali**.

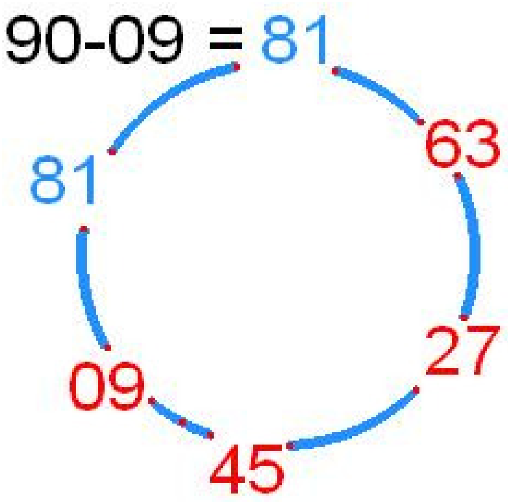
Allora abbiamo preso numeri con cifre diverse e abbiamo applicato la serie di operazioni descritte nella procedura o meglio, come Alexandro ci ha spiegato, abbiamo applicato un *algoritmo*.

Scegliamo a caso i numeri e vediamo alcuni esempi:

[93] 93–39=54 → 54–45=**9**
[86] 86–68=18 → 81–18=63 → 63–36=27 → 72–27=45 → 54-45=**9**
[91] 91–19=72 → 72–27=45 → 54–45=**9**
[81] 81–18=63 → 63–36=27 → 72–27=45→ 54–45=**9**
[64] 64–46=18 → 81–18=63 → 63–36=27 → 72–27=45 → 54–45=**9**

Abbiamo notato che il risultato finale è sempre uguale a **9** da qualsiasi numero si cominci**,** ma non ci si arriva con lo stesso numero di passaggi. Inoltre i risultati di tutte le sottrazioni sono sempre multipli di **9.**

Ci è venuto un dubbio: il numero **9** è formato da una sola cifra, ma noi siamo partiti da numeri di due cifre. Allora abbiamo deciso di aggiungere uno 0 davanti al numero 9, come si fa nelle date, così si formava ancora un numero di 2 cifre **[09]** che, prese in ordine decrescente, davano **90.**
Così avevamo **90 – 09 = 81**.
[9] 90 – 09=81 → 81 – 18=63 → 63 – 36=27 → 72 – 27=45 → 54 – 45 =09 → 90 – 09=81…
Procedendo in questo modo, dopo la prima differenza, si trova una serie di passaggi che si ripetono, o, come ci ha spiegato Alexandro, si entra in un ciclo.



Da qualsiasi numero a due cifre si parta, subito dopo la prima sottrazione otteniamo un multiplo di **9** ed entriamo nel ciclo. Il ciclo è lungo 5 passaggi.

Possiamo capire a priori, senza eseguire l’algoritmo, in che passaggio del ciclo capitiamo dopo la prima sottrazione?

Osserviamo ancora i nostri risultati e proviamo a capire se sono collegati da qualche relazione.

Abbiamo fatto una scoperta: nel ciclo, se partiamo da 36 fino ad arrivare a 81, notiamo una particolarità: la somma degli ultimi 2 numeri (81 + 9) è uguale al doppio del numero che li precede (45 x 2=90). Anche la somma del penultimo e del terzultimo numero (9 + 45) è uguale al doppio del numero che li precede (27 x 2=54) e cosi via.

Raccogliamo le sottrazioni nella seguente tabella, in cui abbiamo scelto numeri la cui differenza delle cifre è diversa, con tutti i possibili risultati da 1 a 9:

L’ingresso nel ciclo

Sottrazione	Punto d’ingresso del ciclo	Differenza tra le due cifre
90-09=81	81	9
91-19=72	27	8
92-29=63	63	7
93-39=54	45	6
83-38=45	45	5
73-37=36	63	4
41-14=27	72	3
86-68=18	81	2
76-67=09	09	1

La differenza tra le due cifre moltiplicata per 9 dà il punto d’ingresso (a volte con le cifre scambiate)

Osserviamo che il risultato di ogni sottrazione (prima colonna) corrisponde, magari con le cifre scambiate, ad un numero del ciclo. Se calcoliamo la differenza tra le due cifre che formano il numero di partenza (terza colonna) e lo moltiplichiamo per 9, individuiamo subito il punto d’ingresso nel ciclo.

Abbiamo trovato troppe regolarità, quindi **non si generano numeri casuali**.

Proviamo con numeri di 3 cifre

Tralasciamo il caso delle tre cifre uguali perché, come con due cifre, abbiamo sempre risultato 0.

Scegliamo tre cifre a caso e applichiamo l'algoritmo:

[954]	954 – 459=**495**
[876]	876 – 678=198 → 981 – 189=792 → 972 – 279=693 →963 – 369=594 → →954 – 459=**495**
[752]	752 – 257=**495**
[875]	875 – 578=297 → 972 – 279=693 → 963 – 369=594 →954 – 459=**495**
[531]	531 – 135=396 → 963 – 369=594 → 954 – 459=**495**

- Dopo un po' di passaggi l'algoritmo si stabilizza sul numero **495**.
- **495** non porta alla formazione di un ciclo, e lo chiamiamo **punto fisso**.
- Come nelle sottrazioni a due cifre, il 495 non viene sempre dopo lo stesso numero di passaggi.

Dopo quanti passaggi si raggiunge il punto fisso?

Proviamo a costruire una tabella:

Numeri di 3 cifre di cui 2 uguali

Sottrazione	Numero di passaggi prima di trovare 495	Differenza tra le due cifre
100-001 = 99	6	1
200-002 = 198	5	2
300-003 = 297	4	3
400-004 = 396	3	4
500-005 = **495**	**1**	**5**
600-006 = 594	2	6
700-007 = 693	3	7
800-008 = 792	4	8
900-009 = 891	5	9

"La differenza fra le due cifre del numero" per "99"
è "il risultato della sottrazione"

Notiamo che la differenza tra le due cifre che compongono il numero (terza colonna) moltiplicata per 99 dà il risultato della sottrazione.

Secondo noi si raggiunge il punto fisso dopo non più di sei passaggi ma non sappiamo come dimostrarlo.

Osserviamo ancora i risultati delle sottrazioni con numeri di tre cifre. Notiamo che:

- In tutti i risultati compare almeno una volta il 9.
- Dopo la prima differenza al centro compare sempre il 9. È come se la cifra in mezzo del numero iniziale "non contasse".

Vediamo un esempio:

1. in 853 – 358 la cifra centrale rimane uguale;
2. la differenza delle unità 3 – 8 richiede un riporto;
3. la differenza delle decine, che sono uguali (5), è 0 (o 10) ma col riporto diventa 9;
4. Questo vale per tutti i numeri di 3 cifre (o anche con 5, 7, … cifre)

- Tutti i risultati sono multipli di 9.
- Tutti i risultati sono multipli di 11 (prima + terza cifra – seconda cifra = 0).
- Tutti i risultati sono multipli di 99 (multipli sia di 9 che di 11).

Anche con 3 cifre non si generano numeri casuali.

Numeri di 4 cifre

[7442] 7442 – 2447=4995 → 9954 – 4599=5355 → 5553 – 3555=1998 →
→ 9981 – 1899=8082 → 8820 – 0288=8532 → 8532 – 2358=**6174**
[7641] 7641 – 1467=**6174**
[7531] 7531 – 1357=**6174**
[5421] 5421 – 1245=4176 → 7641 – 1467=**6174**
[9432] 9432 – 2349=7083 → 8730 – 0378=8352 → 8532 – 2358=**6174**
[6421] 6421 – 1246=5175 → 7551 – 1557=5994 → 9954 – 4599=5355 →
→ 5553 – 3555= 1998→ 9981 – 1899=8082 → 8820 – 0288=8532 →
→8532 – 2358=**6174**

L'algoritmo dopo un po' di passaggi si stabilizza sempre su **6174**, **punto fisso**.

- Come nelle sottrazioni a 3 cifre il punto fisso (**6174**) non si ottiene sempre con lo stesso numero di passaggi
- Con numeri di 4 cifre abbiamo raggiunto il punto fisso dopo non più di 7 passaggi ma non riusciamo a trovare una dimostrazione
- Diversamente dai numeri con 2 e 3 cifre non abbiamo trovato alcuna regolaritàAnche in questo caso il risultato di tutte le sottrazioni è multiplo di 9

Anche con 4 cifre non si generano numeri casuali.

Numeri con 4 cifre

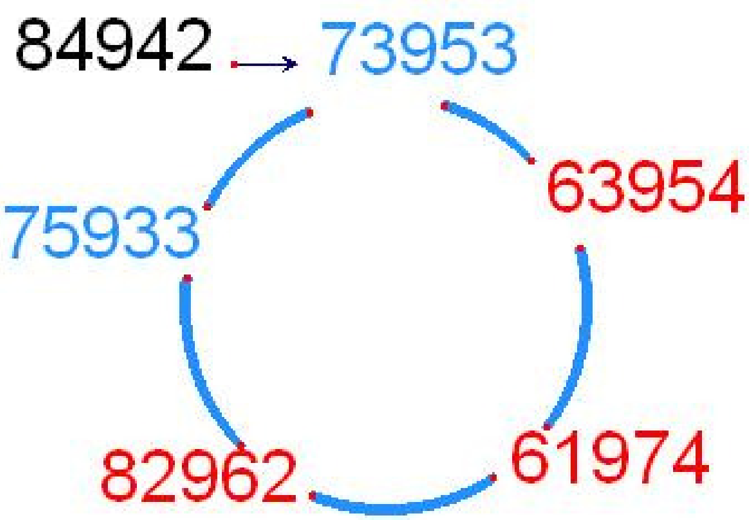
Sottrazione	Numero di passaggi prima di trovare 6174
7641-1467=6174	1
7531-1357=6174	1
5421-1245=4176	2
9432-2349=7083	3
4421-1244=3177	5
7442-2447=4995	6
6421-1246=5175	7

Numeri di 5 cifre

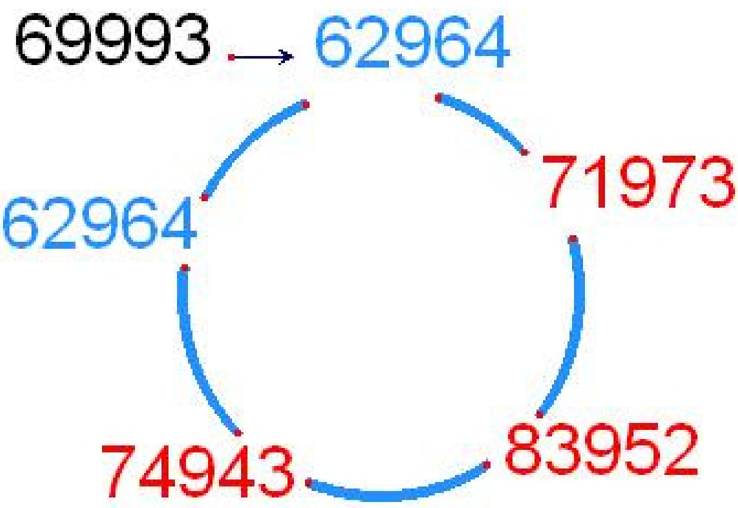
[87643] 87643 – 34678=52965 → 96552 – 25569=70983 → 98730 – 03789=94941 → →99441 – 14499=84942 → 98442– 24489 =73953 → 97533 – 33579=63954 → →96543 – 34569=61974 → 97641 – 14679=82962 → 98622 – 22689=75933

[97541] 97541 – 14579=82962 → 98622 – 22689=75933 → 97533 – 33579=63954 → → 96543 – 34569=61974 → 97641 – 14679=82962

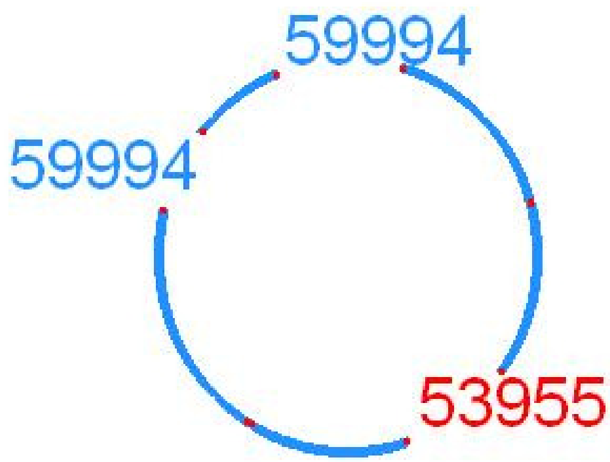
[86210] 86210 – 01268=84942 → 98442 – 24489=73953 → 97533 – 33579=63954 → →96543 – 34569=61974 → 97641 – 14679=82962 → 98622 – 22689=73953



[51111] 51111 – 11115=39996 → 99963 – 36999=62964 → 6642 – 24669=71973 →
→97731 – 13779=83952 → 98532 – 23589=74943 → 97443 – 34479=62964



[95553] 95553 – 35559=59994 → 99954 – 45999=53955



Osservazioni sui risultati delle sottrazioni con 5 cifre:

- Si formano due cicli di 4 passaggi e un ciclo di 2 passaggi.
- I numeri di tutti e tre i cicli sono multipli di 9.
- I numeri di tutti i cicli sono divisibili per 11.
- I numeri dei cicli sono tutti multipli di 99.

La domanda a cui non riuscivamo a dare una risposta era:

“Che significato ha il fatto che tutti i numeri siano divisibili per 9?”

Abbiamo cominciato a ragionare sul fatto che tutti i numeri sono divisibili per 9.
Abbiamo preso ad esempio la sottrazione 63 – 36 e l'abbiamo riscritta usando la scrittura polinomiale; in seguito abbiamo trasformato le potenze di 10 della scrittura polinomiale in lettere, in particolare $10^1 = a$ e $10^0 = b$.

$$63 - 36 = (6x10^1 + 3x10^0) - (3x10^1 + 6x10^0) =$$
$$= (6b + 3a) - (3b + 6a) .$$

In seguito abbiamo fatto una semplificazione pensando alla formula per calcolare un lato di un triangolo scaleno: se conosciamo le misure del perimetro e degli altri due lati si può togliere al perimetro la somma dei due lati oppure togliere al perimetro prima un lato e poi l'altro; qui abbiamo utilizzato lo stesso ragionamento ma usando i numeri dell'operazione. Quindi:

$$(6b + 3a) - (3b + 6a) = 6b + 3a - 3b - 6a.$$

Subito dopo abbiamo notato che a 6b possiamo togliere 3b, ottenendo 3b. Poi abbiamo notato che se a 3b addizioniamo 3a e poi gli sottraiamo 6a è come se gli avessimo sottratto 3a.

$$63 - 36 = 3b + 3a - 6a =$$
$$= 3b - 3a = 3(b - a).$$

L'ultima parte l'abbiamo ricavata usando la proprietà distributiva della moltiplicazione al contrario.
Dopo siamo tornati ad usare le potenze di 10.

$$3b - 3a = (3x10^1) - (3x10^0) = 3(10^1 - 10^0) = 3x(10 - 1) = 3x9 = 27.$$

Con questo metodo abbiamo trovato il 9 che spiega perché tutti i numeri sono divisibili per 9 e inoltre il risultato corrisponde al numero successivo del ciclo.

Per vedere se questo metodo funziona abbiamo provato ad usarlo con il risultato che abbiamo ottenuto; questa volta, però, abbiamo usato sempre le potenze di 10 visto che ormai il ragionamento lo conosciamo e le lettere servivano solo per ragionare meglio.

$$72 - 27 = (7x10^1 + 2x10^0) - (2x10^1 + 7x10^0) =$$
$$= 7x10^1 + 2x10^0 - 2x10^1 - 7x10^0 =$$
$$= 5x10^1 + 2x10^0 - 7x10^0 =$$
$$= 5x10^1 - 5x10^0 =$$
$$= 5x(10^1 - 10^0) =$$
$$= 5x9 = 45.$$

Anche in questo caso troviamo il 9 e il risultato corrisponde al numero successivo del ciclo.

Allora ci siamo chiesti: funzionerà anche con tre cifre?
Abbiamo provato con il numero 753 (preso a caso) e anche questa volta abbiamo tenuto le potenze di 10.

$$753 - 357 = (7x10^2 + 5x10^1 + 3x10^0) - (3x10^2 + 5x10^1 + 7x10^0) =$$
$$= 7x10^2 + 5x10^1 + 3x10^0 - 3x10^2 - 5x10^1 - 7x10^0 =$$
$$= 4x10^2 + 3x10^0 - 7x10^0 =$$
$$= 4x10^2 - 4x10^0 =$$
$$= 4(10^2 - 10^0) = 4 x 99 = 396.$$

Le semplificazioni sono state fatte usando lo stesso metodo usato per i numeri composti da due cifre.
C'è una particolarità da notare: nell'operazione abbiamo trovato $+5x10^1$ e poi $-5x10^1$, quindi cancelliamo questi numeri, non li consideriamo.

Ecco perché la cifra centrale dei numeri di 3 e 5 cifre non contava!

Infine abbiamo notato che con i numeri composti da tre cifre non compare il 9, ma compare il 99, che è comunque un suo multiplo, e anche in questo caso il risultato corrisponde al numero successivo del ciclo.