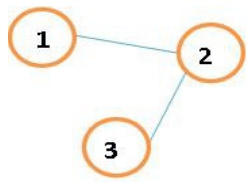
Tanti computer, poche trasmissioni

Vogliamo costruire una rete di computer collegati da cavi, in modo che vengano soddisfatte separatamente quattro differenti condizioni. Come disporre i computer?

Liceo Scientifico "Ettore Majorana" - Cesano Maderno (MB)
Classe: II S
Insegnante di riferimento: prof.ssa Linda Tagliabue
Ricercatore: Alessandro Cattaneo
Partecipanti: Jasmine Allievi, Simone Biffi, Riccardo Braga, Pietro Cassarino, Rossella Galimberti, Sebastiano Galliani, Gianluca Gorgoglione, Andrea Migliavacca, Gioele Pagani, Ruggero Panzeri, Gianni Pisaroni, Samuel Presotto e Davide Proserpio.

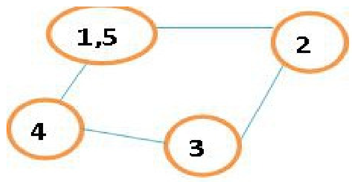
Problema A

Si deve inviare un segnale a tutti i computer, senza che questo venga ripetuto su nessuno di essi.



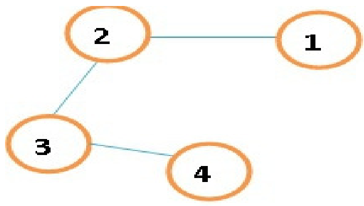
Problema B

Il segnale trasmesso, dopo essere transitato su tutti i computer della rete, deve tornare al punto di partenza.



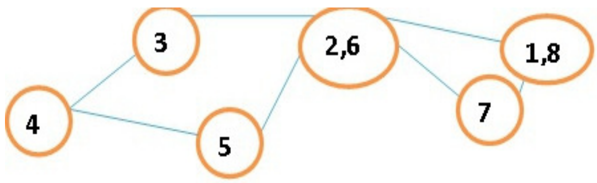
Problema C

Il segnale può passare più volte in un computer ma deve passare una volta sola in ogni cavo, senza tralasciarne alcuno.



Problema D

Il segnale deve tornare al punto di partenza, passando una volta per ogni cavo.

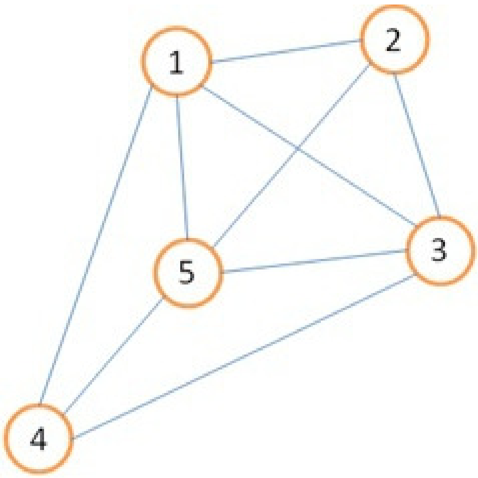


I problemi appena citati sono risolti quando le condizioni trovate sono verificabili partendo da almeno un computer della rete.

TEORIA DEI GRAFI

GRAFO

Per introdurre il concetto di grafo consideriamo l'esempio di una rete che collega *n* computer.



Modello: un grafo $G = (N,L)$ che consiste in un insieme

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

di nodi (vertici), e in un insieme

$$L = \{[1,2]; [1,3]; [1,4]; [1,5]; [2,3]; [2,5]; [3,4]; [3,5]; [4,5]\}$$

di collegamenti tra i nodi.

In questo esempio con cinque nodi la rete può essere rappresentata schematicamente e graficamente associando a ogni computer un cerchio, eventualmente numerato, chiamato *nodo*, e a ogni collegamento diretto tra coppie di nodi una linea che li congiunge, che è chiamata *lato*.

Dal punto di vista matematico il grafo è formato da un insieme di nodi (*N*) e da un insieme di lati (*L*), con la condizione che ogni lato termini ad ogni estremità in un nodo.
Inoltre:

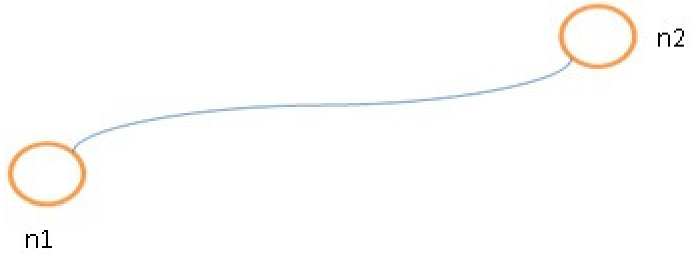
- due nodi sono detti adiacenti se esiste un lato che li collega;
- un lato è incidente in un dato nodo se quest'ultimo è uno dei suoi estremi.

Ad esempio, nella figura precedente, i nodi 1 e 2 sono adiacenti, e il lato [1,5] è incidente nei nodi 1 e 5.

Il *grado* di un nodo è il numero di lati incidenti. Nell'esempio, il nodo 1 è di grado 4 e il nodo 4 è di grado 3.

GRAFI CONNESSI E NON CONNESSI

Due nodi n1, n2 ∈*N* sono detti connessi se esiste un cammino che li collega.



Un grafo G è connesso se tutte le coppie di nodi sono connesse, ovvero se per ogni coppia di nodi esiste un cammino che li collega.

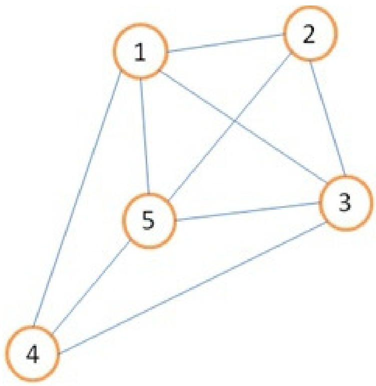


Fig. 1

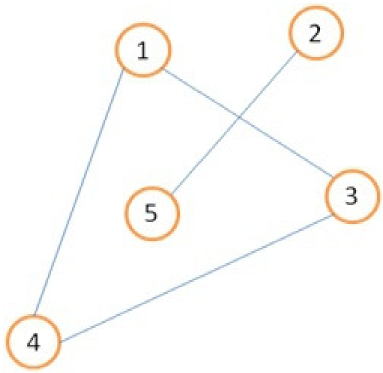


Fig.2

Il grafo in figura 1 è connesso, mentre quello in figura 2 no. Infatti non esiste, ad esempio, un cammino che collega il nodo 1 al nodo 2, o il nodo 1 al nodo 5.

CAMMINO E CICLO

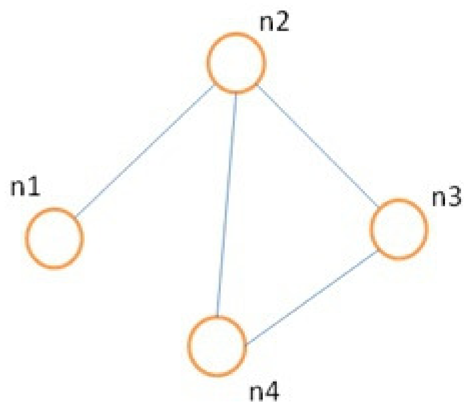


Fig.3

Nella figura:

$$N = \{n1, n2, n3, n4\},$$

$$L = \{[n1,n2]; [n2,n3]; [n2,n4]; [n3,n4]\}.$$

Un *cammino* è una sequenza di lati consecutivi [*n1*,*n2*], [*n2*,*n3*], … , [*nk*-1,*nk*] che collega il nodo *n1* al nodo *nk* (nodo finale).

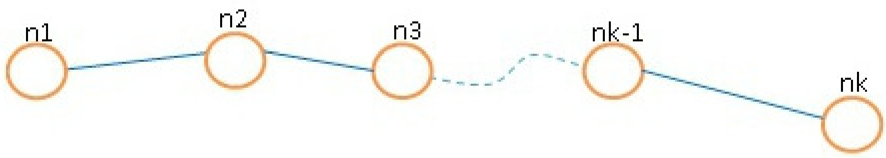
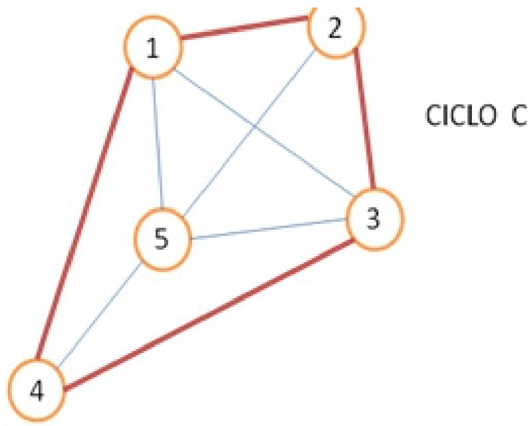


Fig. 4

NB: in figura 3 il cammino dal nodo *n1* al nodo *nk*-1 non è un cammino unico.

Un *ciclo* è un cammino chiuso (nodo finale = nodo iniziale).



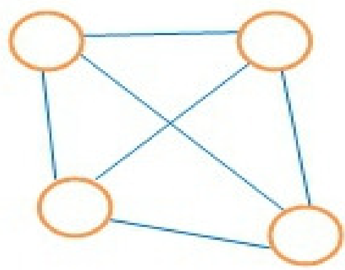
GRAFO COMPLETO

Un grafo è *completo* se per ogni coppia di nodi esiste un lato che li collega.

Il numero di lati L è soggetto alla relazione: $L \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

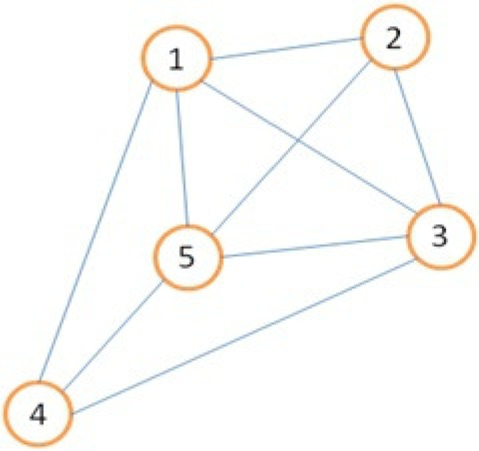
In caso di uguaglianza il grafo è completo.

Nell'esempio: un grafo di 4 nodi ha al massimo 6 lati.

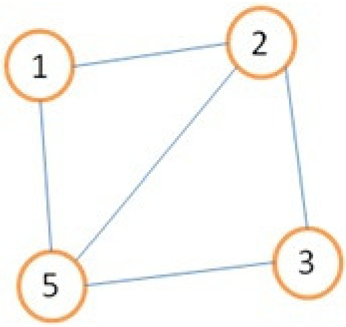


SOTTOGRAFO

Esempio: Consideriamo una rete di comunicazione che collega *n* computer.



G' = (*N'*,*L'*) è un *sottografo* di *G*=(*N*,*L)* se *N'* è sottoinsieme di *N* e *L'* è sottoinsieme di *L.*

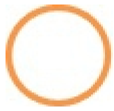


Nell'esempio: *N'*={1, 2, 3, 5} sottoinsieme di *N*, e *L'*={[1,2], [1,5], [2,3], [2,5], [3,5]} sottoinsieme di L.

INIZIAMO A LAVORARE

Una volta raccolte queste informazioni, abbiamo riscontrato il primo ostacolo: come iniziare? Abbiamo steso una scaletta illustrando le possibili cose da esaminare. Le nostre prime considerazione sono state effettuate sui problemi A e C: il computer di partenza deve avere almeno il cavo di uscita, invece per il B e D anche uno di entrata. Ci siamo aiutati anche col *Geomag*, un gioco composto da sfere d'acciaio e barrette magnetiche, per comporre con più rapidità le reti. Navigando su Internet siamo venuti a conoscenza del *'Problema dei ponti di Königsberg',* in cui si chiedeva se fosse possibile attraversare tutti i ponti di una città una sola volta, tornando poi al punto di partenza. Esso è paragonabile al nostro problema D. Eulero affrontò tale problema, dimostrando che la passeggiata ipotizzata non era possibile.

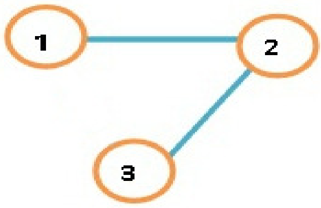
I problemi sui quali abbiamo iniziato poi a ragionare sono stati A e B.
Sono stati analizzati, in principio, grafi molto semplici. La rete più banale realizzabile è quella senza nessun cavo né computer; ovviamente in questo caso sono risolvibili tutti i problemi presi in considerazione. Altri grafi elementari sono :

- quello composto da un solo computer e nessun cavo; 

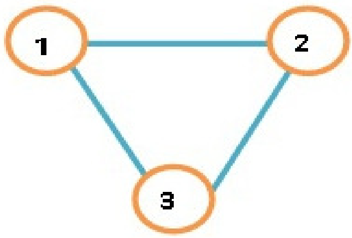
- quello composto da due computer e un cavo. 

Anche in questo caso sono risolvibili entrambi i problemi.
Siamo poi passati a grafi più complessi, per esempio quello composto da 3 computer. In questo caso le opzioni sono due, supponendo che non ci siano due computer scollegati:

- ci sono solamente due cavi per tre computer. In questo caso è risolvibile solo il problema A, dal momento che il cavo di partenza ha solo l'uscita del segnale.

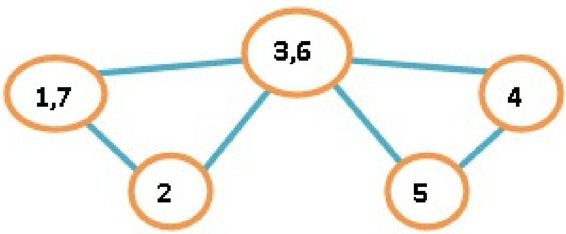


- ci sono tre cavi per tre computer. In questo caso sono risolvibili sia A che B. Il grafo evidenziato è un triangolo. Si possono fare le prime considerazioni sui poligoni.

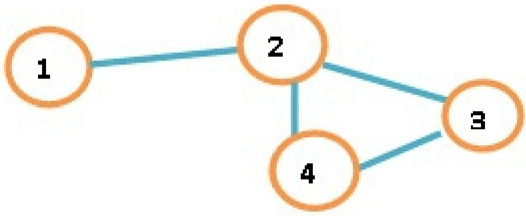


Proseguendo con questo metodo siamo giunti alla conclusione che *quando il ciclo è semplificabile in un poligono, allora sono sempre risolvibili sia A sia B*. Alessandro ci ha spiegato poi che per i problemi A e B non sono ancora state trovate delle soluzioni di carattere generale.

Siamo così passati ai problemi C e D, per i quali è stato molto più semplice trovare delle risoluzioni. Concentrandoci maggiormente sui gradi dei PC abbiamo infatti osservato che *tutte le volte che un grafo presenta solo nodi con*

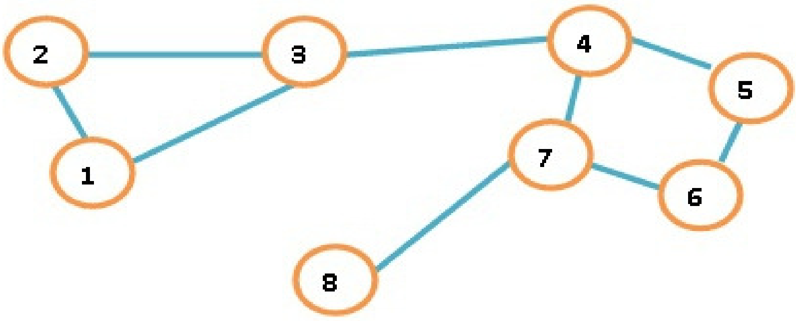


grado pari, allora D è risolvibile. Questa è stata la prima condizione trovata.
Per C vale la stessa risoluzione, in più esso è risolvibile anche se ci sono *al massimo due computer di grado dispari*. In questo caso si parte da uno di essi e si arriva nell'altro.

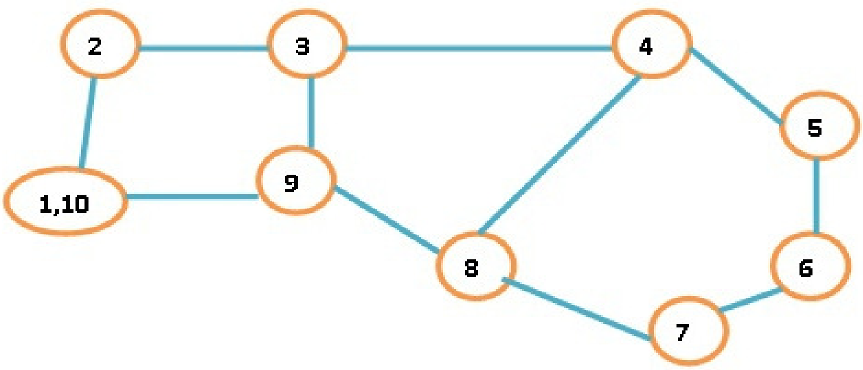


Cicli collegati

Una volta trovata la risoluzione per entrambi i problemi, siamo passati di nuovo ad A e B. Nell'incontro con Alessandro, abbiamo ragionato sul fatto di ridurre i vari problemi a dei cicli affinché il grafo sia connesso e non presenti cavi 'superflui'. I grafi appena descritti sono poligoni e, come già detto prima, A e B sono sempre risolvibili. Ma se questi cicli fossero collegati tra loro?
Provando a collegarli in vari modi, siamo arrivati ad una nuova conclusione:
- problema A: quando i due cicli sono collegati da almeno un cavo il problema è risolvibile. In caso ci fossero 3 o più cicli, i cavi devono appartenere a due PC adiacenti sia ad un poligono che all'altro;



- problema B: quando i due cicli sono uniti da almeno due lati che appartengono a due punti adiacenti, il problema è risolvibile. In caso i poligoni siano più di 2, il procedimento è lo stesso: essi devono essere collegati tra loro da cavi posti su PC adiacenti.



Riassumendo

Problema A:

- sempre risolvibile se il ciclo è semplificabile in un poligono (nel grafo di partenza vengono eliminati i cavi superflui);
- quando due cicli sono collegati da almeno un cavo è risolvibile. In caso ci fossero 3 o più cicli, i cavi devono appartenere a due PC adiacenti sia ad un poligono che all'altro.

Problema B:

- sempre risolvibile se il ciclo è semplificabile in un poligono (nel grafo di partenza vengono eliminati i cavi superflui);
- quando due cicli sono uniti da almeno due cavi che congiungono due computer adiacenti, in entrambi i poligoni è risolvibile. In caso i poligoni siano più di 2, il procedimento è lo stesso, i poligoni devono essere collegati tra loro da dei cavi posti su PC adiacenti.

Problema C:

- tutti i PC devono essere di grado pari. Possono esserci al massimo due PC di grado dispari. Tuttavia, in questo caso, bisogna partire da uno di essi e arrivare nell'altro.

Problema D:

- tutti i PC devono essere di grado pari.

Per i problemi A e B non sono state trovate soluzioni definitive. Siamo però riusciti a trovare queste condizioni: il problema A è risolvibile se due cicli sono uniti da almeno un lato (se ce ne sono di più i lati devono appartenere a due punti adiacenti nel primo ciclo sia nell'altro).

Il problema B è risolvibile se i due poligoni sono uniti da almeno due lati che devono appartenere a due punti adiacenti sia in un poligono che nell'altro. Se un grafo è il bordo di un poligono, il problema è risolvibile sia per il punto A che per il punto B.

Per il problema C tutti i nodi devono essere di grado pari, oppure ci possono essere al massimo due nodi di grado dispari; uno deve essere il nodo di partenza e l'altro quello di arrivo.

Perché sia risolvibile il problema D si deve invece avere tutti i punti di grado pari.

BIBLIOGRAFIA

- Autore: C. A. Desoer, E. S. Kuh
  Titolo: Fondamenti di teoria dei circuiti
  Edizione: Franco Angeli

- Autore: Alberto Colorni
  Titolo: Ricerca operativa
  Edizione : Politecnico di Milano

SITOGRAFIA

- Wikipedia
- http://home.dei.polimi.it