Tanti computer, poche trasmissioni

Vogliamo costruire una rete di computer collegati da cavi, in modo che vengano soddisfatte separatamente quattro differenti condizioni. Come disporre i computer?

Liceo scientifico "Galileo Galilei" – Erba (CO)
Classi: I A, I C, I E
Insegnante di riferimento: prof.ssa Raffaella Cetti
Ricercatore: Alessandro Cattaneo
Partecipanti: Alice Barbero, Giovanni Bosio, Anna Cazzaniga, Luca Cilibrasi, Laura Cordolcini, Pietro Corti, Alessandro Girelli, Riccardo Longoni, Eugenio Mauri, Marco Molinari, Gianluca Panzeri, Riccardo Pontiggia, Marcello Pozzessere, Pietro Pozzoli, Matteo Ratti, Claudio Rigamonti, Elia Ronchetti, Alex Stabile

Introduzione

Siamo diciotto ragazzi e frequentiamo la classe prima, sezioni A, C, E, del Liceo Scientifico "Galileo Galilei" di Erba; in questo progetto siamo stati coordinati da una docente di matematica, la professoressa Raffaella Cetti, e il nostro lavoro è stato supervisionato da un ricercatore, Alessandro Cattaneo.
Agli inizi di novembre dello scorso anno, dalla professoressa Cetti ci è stato proposto un laboratorio pomeridiano di matematica denominato *MATh.en. JEANS*; lo scopo era quello di approfondire in modo divertente ambiti della Matematica che normalmente non fanno parte dei programmi didattici e quindi non arrivano nelle aule scolastiche.
Incuriositi dalla proposta, abbiamo deciso di partecipare al primo incontro, durante il quale abbiamo conosciuto il ricercatore del Centro interuniversitario "matematita" Alessandro Cattaneo, che col tempo è diventato semplicemente Alessandro.

I problemi da studiare

In quel primo pomeriggio Alessandro ci ha illustrato il contenuto dei quattro problemi, che riguardano tutti una rete di computer, cioè un insieme di computer collegati fra loro da cavi:

- il primo problema consiste nel trovare un percorso nella rete in modo che un messaggio venga inviato a tutti i computer senza passare due volte per lo stesso computer;
- il secondo problema consiste nel trovare un percorso nella rete in modo che un messaggio venga inviato a tutti i computer, senza passare due

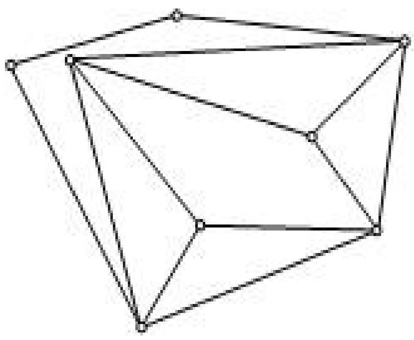
volte per lo stesso computer e tornando al computer di partenza;
- il terzo problema consiste nel trovare un percorso nella rete in modo che un messaggio passi per tutti i cavi un'unica volta; in questo caso si può passare più volte per uno stesso computer;
- il quarto problema consiste nel trovare un percorso nella rete in modo che un messaggio passi per tutti i cavi un'unica volta, tornando al computer di partenza; anche in questo caso si può passare più volte per uno stesso computer.

Mediante delle reti d’esempio, Alessandro ha iniziato a farci riflettere e a farci capire come avremmo dovuto lavorare negli incontri seguenti.
Nelle settimane successive ci siamo ritrovati ogni quindici giorni, al giovedì pomeriggio, e, suddivisi in gruppi di quattro o cinque componenti, abbiamo confrontato teorie ed ipotesi elaborate indipendentemente da ciascuno di noi.
In più, durante le ore di matematica, la professoressa ha continuato a farci riflettere e ragionare, proponendoci altri problemi collegati a quelli proposti dal *MATh.en.JEANS* e che avrebbero potuto aiutarci nella risoluzione di quelli dati.
Nei primi incontri abbiamo iniziato prendendo in esame reti di computer con forme regolari, come ad esempio prismi o reti a maglie triangolari e quadrangolari. Da queste reti abbiamo dedotto delle prime regole generali che potessero aiutarci nella risoluzione dei quattro problemi, poi abbiamo analizzato la validità di tali regole su reti con forme irregolari.

Definizioni preliminari

Per cercare di formalizzare gli elementi discorsivi con cui abbiamo avuto a che fare, abbiamo utilizzato i seguenti termini:

- “punto” per indicare un computer;
- “linea” per indicare un cavo di collegamento tra un computer e l’altro;
- “valore” per indicare il numero di collegamenti che entrano ed escono da un computer;
- “rete” per indicare un insieme di computer che siano collegati tra loro da cavi.



Inoltre abbiamo utilizzato dei disegni schematici per rappresentare le varie situazioni.

Enunciato dei problemi

Gli enunciati dei problemi, già riportati in maniera discorsiva sopra, sono stati indicati con le lettere A, B, C, D.

- **Problema A**: stabilire delle condizioni secondo le quali sia possibile trovare in una rete un percorso che tocchi *tutti i punti una ed una sola volta*;
- **Problema B**: stabilire delle condizioni secondo le quali sia possibile trovare in una rete un *percorso chiuso* (cioè con ritorno al punto di partenza) che tocchi tutti i punti *una ed una sola volta*;
- **Problema C**: stabilire delle condizioni secondo le quali sia possibile trovare in una rete un percorso che passi per *tutte le linee una ed una sola volta*;
- **Problema D**: stabilire delle condizioni secondo le quali sia possibile trovare in una rete un *percorso chiuso* (cioè con ritorno al punto di partenza) che passi per *tutte le linee una ed una sola volta.*

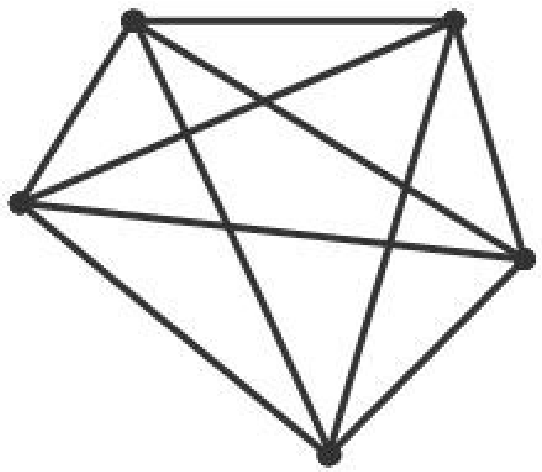
Regole valide in generale

Durante lo studio dei nostri problemi abbiamo scoperto alcune regole su come possono essere collegati punti e linee nella costituzione di una rete.

■ La prima regola riguarda il numero massimo di linee che si possono tracciare tra i punti; abbiamo scoperto la seguente formula:

$$k = \frac{N(N-1)}{2},$$

dove N è il numero di punti considerati e k è il numero massimo delle linee possibili.



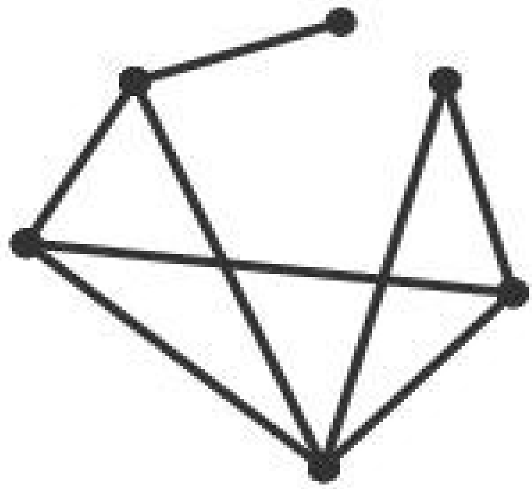
Siamo arrivati a questa conclusione grazie ad un problema matematico analogo affrontato in classe e che ci è stato posto dalla professoressa Cetti. Il problema consiste nel calcolare il numero di strette di mano che ogni persona deve fare quando un gruppo di N persone si incontra, e ognuno deve stringere la mano a tutti gli altri del gruppo.

Ogni persona stringe la mano ad ogni altra, quindi si potrebbe pensare che il numero di strette di mano sia $N \times N$. Però le persone non stringono la mano a loro stesse, quindi $(N - 1) \times N$, ed infine si aggiunge la divisione per 2 poiché con questo conteggio ogni stretta di mano verrebbe calcolata 2 volte.

■ La seconda formula riguarda il numero totale di linee in relazione alla somma dei valori di ogni punto:

$$K = \frac{(v_1 + v_2 + v_3 + ...)}{2},$$

dove K è il numero totale di linee e $v_1, v_2, v_3 ...$ è il valore di ogni punto.
Abbiamo dedotto da questa formula che il risultato di $(v_1 + v_2 + v_3 + ...)$ dovrà essere un numero pari perché diviso per 2 deve risultare un numero intero, quindi abbiamo intuito che *in una rete non ci può essere un numero dispari di punti con valore dispari*.

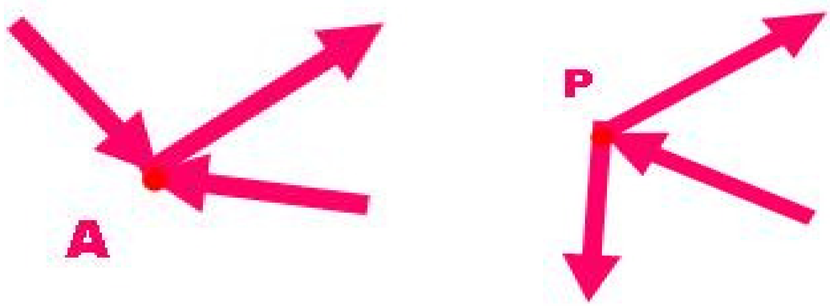


Risoluzione dei problemi

I risultati più interessanti (e completi) che abbiamo ottenuto riguardano la questione di trovare un percorso che passi una sola volta per tutte le linee, con un circuito chiuso (problema D) o almeno aperto (problema C). In queste due questioni siamo riusciti a trovare delle risposte valide in generale, cioè per una qualsiasi rete.

Problema C

Il problema C si può risolvere solo se il numero dei punti con valore dispari è uguale a 0 o a 2; questo perché da un punto di questo tipo (dispari) si può entrare e uscire un numero di volte uguale a $\frac{v-1}{2}$ (in cui v è il valore del punto considerato), ma alla fine si potrà rientrare, ma non uscire da quel punto o, viceversa, uscire ma non rientrare.



Per questo motivo un punto di valore dispari deve essere o *l'arrivo* **A** o la *partenza* **P**; quindi, se il numero dei computer di tale tipo è superiore a 2, non si potrà trovare un percorso chiuso, e neanche uno aperto.

Problema D
Il problema D si può risolvere solamente se tutti i punti hanno valore pari. Ciò perché se in una rete c'è un punto di valore dispari allora, per quello che abbiamo dimostrato precedentemente, può essere solamente o il punto d'arrivo o quello di partenza. Non si quindi ottenere un percorso chiuso.

Conclusioni per i problemi C e D
in una qualsiasi rete basta controllare il valore di ogni punto:
- se i valori sono *tutti pari*, si può risolvere sia il problema C che il D (fig.1);
- se *due valori sono dispari e tutti gli altri pari*, si può risolvere il problema C, ma non il D (fig.2);
- se i punti con valore *dispari* sono *più di due*, non si può risolvere né il problema C, né il D.(fig.3).

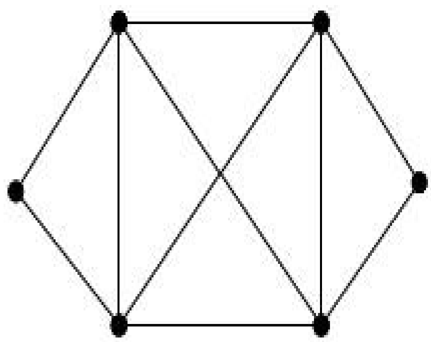


fig.1

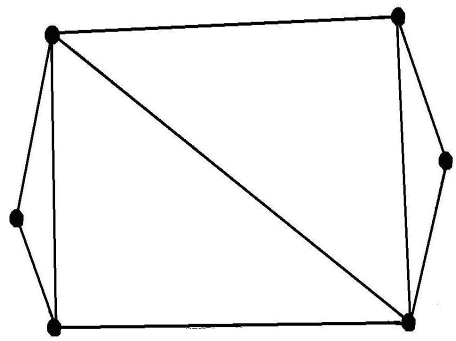


fig.2

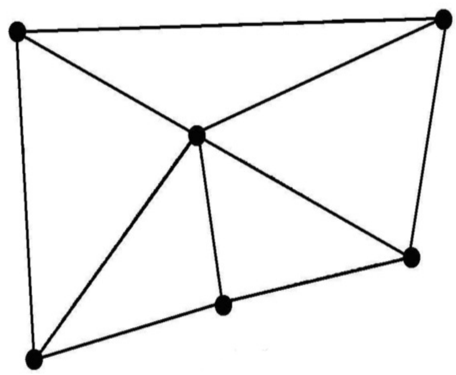


fig.3

Problema A e B
Per la risoluzione dei problemi A e B non abbiamo ottenuto risultati validi in generale, ma solo in alcuni casi (o gruppi di casi) più particolari.

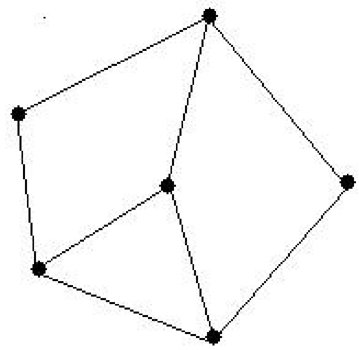
Nel nostro lavoro siamo partiti dall'osservare delle reti in cui i computer fossero disposti come in figura 1. Abbiamo poi unito tutti i punti e abbiamo cercato un percorso che passasse una sola volta per ogni punto (e poteva essere sia chiuso che aperto) e abbiamo "cancellato" tutte le linee che non venivano utilizzate; analizzando le linee rimaste, abbiamo così trovato una relazione fra tutti punti e le linee che avevamo impiegato.

Il risultato è stato che:

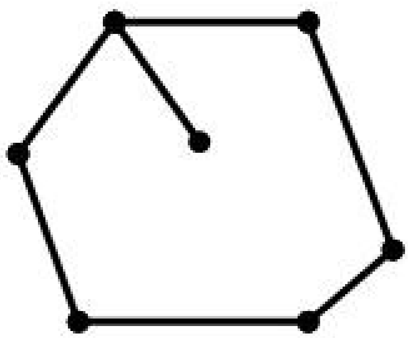
- per il problema A: $N = K - 1$
- per il problema B: $N = K$

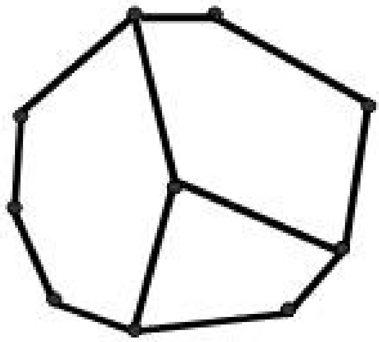
dove N è il numero delle linee e K è il numero dei punti.

Abbiamo poi applicato lo stesso metodo di lavoro anche a figure piane con forme sia regolari che irregolari, e la relazione in tutti i casi è risultata vera. Osservando le figure che si formavano abbiamo potuto osservare che, eliminate tutte le linee inutilizzate, si formava un percorso in cui da ogni punto entrava una linea e ne usciva un'altra. Il percorso aveva sempre l’aspetto di una linea spezzata, aperta o chiusa.



Alcuni di noi hanno ragionato su reti composte da un poligono ed un punto posto approssimativamente come centro. Se si ha almeno una linea che collega il centro con un punto del perimetro, allora si può passare per tutti i punti.
Abbiamo osservato che *si può costruire un circuito chiuso passando per tutti i punti solo se almeno due punti del perimetro sono collegati con il centro; i punti interessati devono essere però consecutivi*.
Se c’è un solo collegamento tra centro e perimetro, o se tra i punti del perimetro collegati con il centro non ce ne sono almeno due consecutivi, non si riesce a trovare il percorso chiuso, ma solo quello aperto (come si vede dalle seguenti figure).





Un altro gruppo ha lavorato con reti a maglie quadrangolari (schierate in rettangoli come mostrato nelle figure successive) e hanno scoperto che si riesce a trovare un percorso chiuso (e quindi anche uno aperto) quando il numero dei punti che compongono le reti è pari, mentre se il numero dei punti è dispari non è possibile trovare un percorso chiuso, ma solamente uno aperto.

Infatti sappiamo che un prodotto pari è ottenibile sia moltiplicando fattori di valore pari, che moltiplicando un fattore pari e uno dispari. Viceversa, se moltiplichiamo un fattore dispari per uno dispari il risultato sarà dispari. Così possiamo dedurre che le reti di questo tipo che hanno un numero pari di punti dovranno avere i lati formati o entrambi da un numero pari di punti, o da uno dispari e uno pari; mentre se una rete ha un numero dispari di punti i suoi lati saranno entrambi dispari.

Per comprendere perché in una rete con un numero pari di punti è sempre possibile trovare il percorso chiuso, basta osservare le figure seguenti:

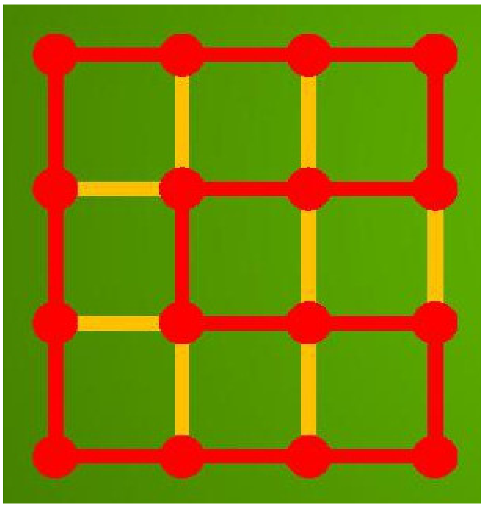


fig.1

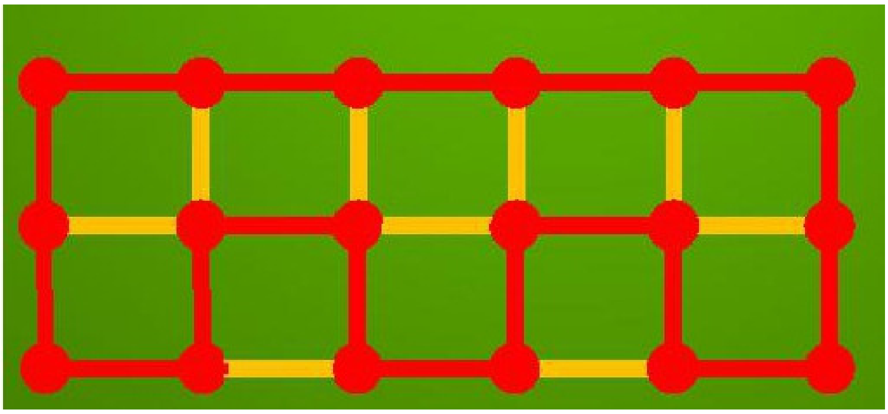


fig.2

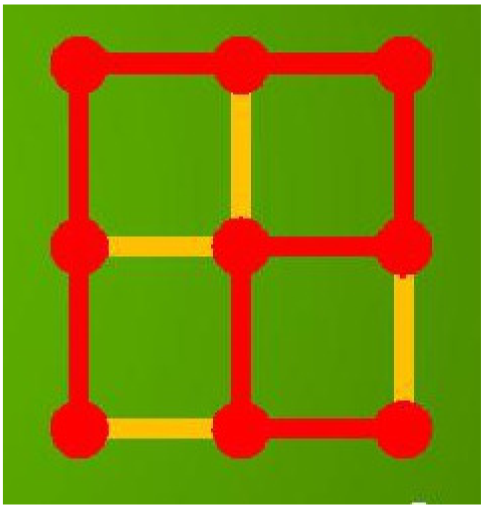


fig.3

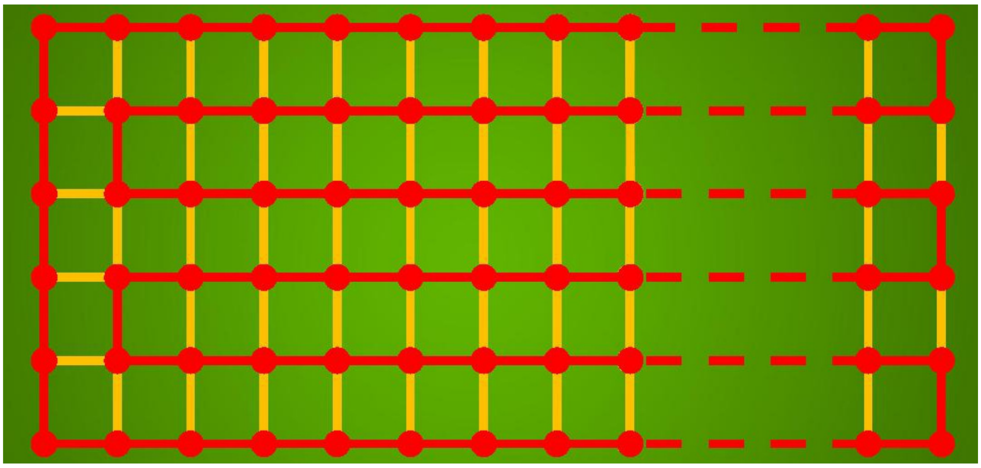
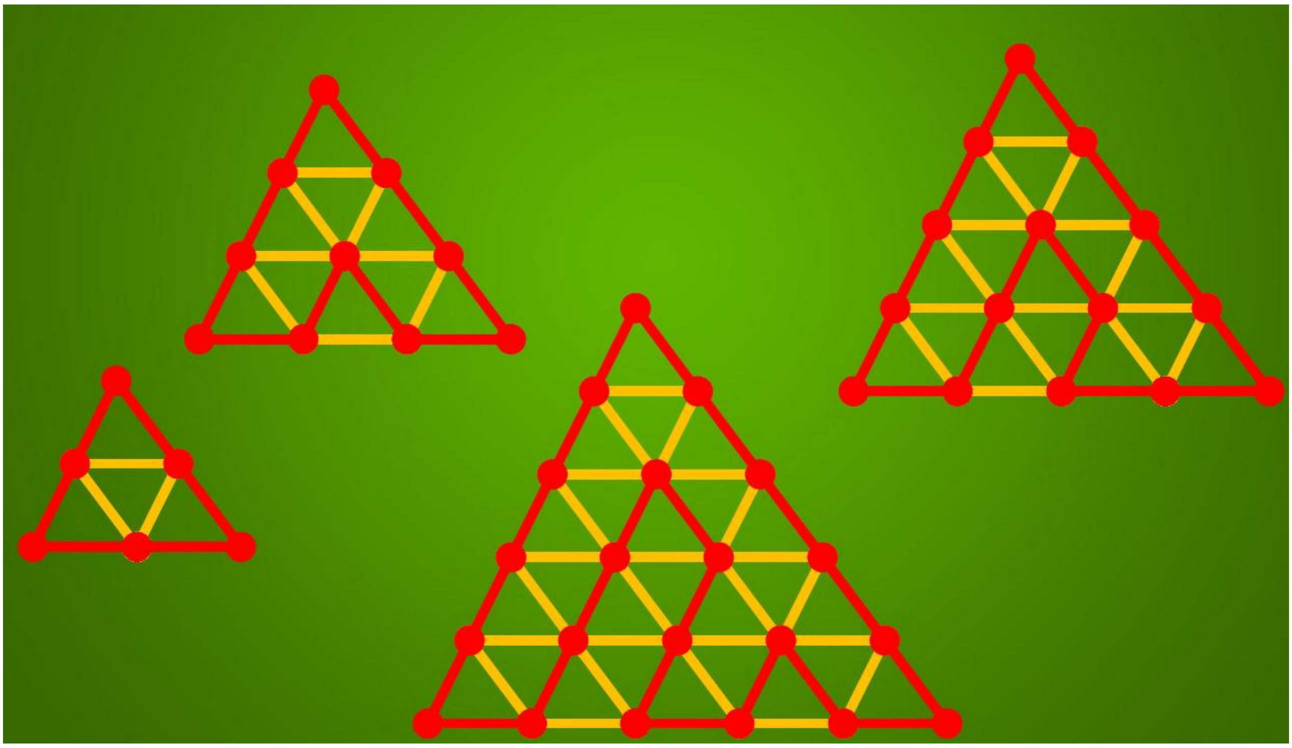


fig.4

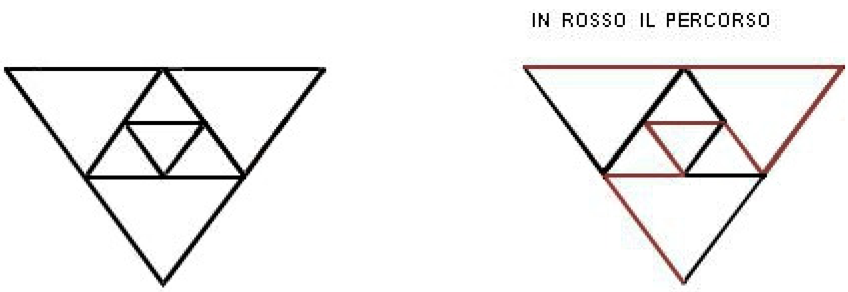
Nella figura 4 si nota che i punti che formano la base del rettangolo possono essere un numero qualsiasi, mentre quelli dell'altezza devono essere esclusivamente pari. Il percorso da fare (partendo ad esempio dal vertice in alto a sinistra) per ritornare al punto di partenza è sempre dello stesso tipo.

Viceversa nella figura 3, in cui si considera una rete con un numero dispari di punti, notiamo invece che è possibile trovare solo un percorso aperto.

Un terzo gruppo ha infine lavorato con reti a maglie triangolari, in cui ogni punto deve essere vertice dei triangoli circostanti e la forma complessiva deve essere quella di un triangolo equilatero; in tutte le prove che abbiamo compiuto il risultato è sempre stato lo stesso: sia il problema A che il B potevano essere risolti; infatti, come si può osservare dai disegni, nonostante il numero di punti per lato aumenti, si riesce sempre a toccare tutti i punti tornando a quello di partenza.



Un altro caso di rete a maglie triangolari è il seguente:



Questo caso non rispetta tutte le condizioni dette sopra (ogni punto deve essere vertice dei triangoli circostanti), e si riesce a trovare solo il percorso aperto (segnato in rosso), ma non quello chiuso.

Conclusioni

Il lavoro che abbiamo svolto è stato per tutti noi molto interessante e coinvolgente; abbiamo scoperto alcune regole autonomamente, e abbiamo cercato anche di dimostrarle; questo è stato spesso un lavoro molto arduo, ma che ci ha appassionato. Una difficoltà che abbiamo incontrato è stata quella di mettere per iscritto le nostre idee, ma anche questo ci è servito molto e alla fine la fatica è stata ripagata dall'aver portato a termine questo lavoro.