

Diagrammi/Tassellazioni di Voronoi

Un diagramma di Voronoi è una suddivisione del piano determinata dalle distanze rispetto ad un determinato insieme finito di punti generatori fissati. Come fare per costruirla?

Liceo Scientifico Majorana - Rho (MI)

Classe: II S

Insegnante di riferimento: prof.ssa Nadia Boldrin

Ricercatore: dott. Enea Bongiorno

Partecipanti: Alessandro Basetti, Jessica Bollini, Andrea Borsani, Carlo Brevi, Gabriele Camorcia, Luca Canizzaro, Andrea Defilippis, Dejan Forza, Lorenzo Gatti, Arianna Guarnaccia, Luca Guerriero, Marco Iori, Marco Leone, Deborah Mazzotta, Samuele Motta, Alessandro Musarella, Alessia Oddo, Filippo Paggiaro, Gaia Papotti, Mauro Patuzzo, Cristina Plin, Martina Pugliese, Marco Pirrò, Gabriele Prato, Andrea Repellini, Giulia Scalise, Francesco Toja, Ilaria Varotti

Quest'anno abbiamo partecipato al progetto *MATh.en.JEANS*, durante il quale, a volte con l'aiuto del ricercatore di riferimento, Enea Bongiorno, altre volte lavorando indipendentemente, ci siamo occupati di un problema matematico relativo alla suddivisione dello spazio. Durante il primo incontro ci sono state mostrate delle immagini con una suddivisione dello spazio particolare, di origine sia naturale che artificiale, come ad esempio un alveare di api (Fig. 1), dei palazzi (Fig. 2) e delle bolle di sapone (Fig. 3) e delle piantine stradali (Fig.4).

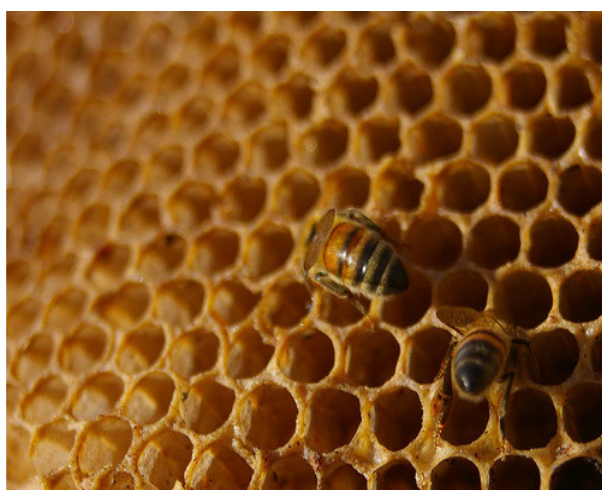


Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4

Dopo diversi incontri abbiamo capito che queste immagini rappresentano della particolari suddivisioni dello spazio, che Enea ci ha detto poi essere chiamate “tassellazioni di Voronoi”, dal nome del matematico russo Georgij Feodos'evič Voronoj che ne ha dato la definizione.

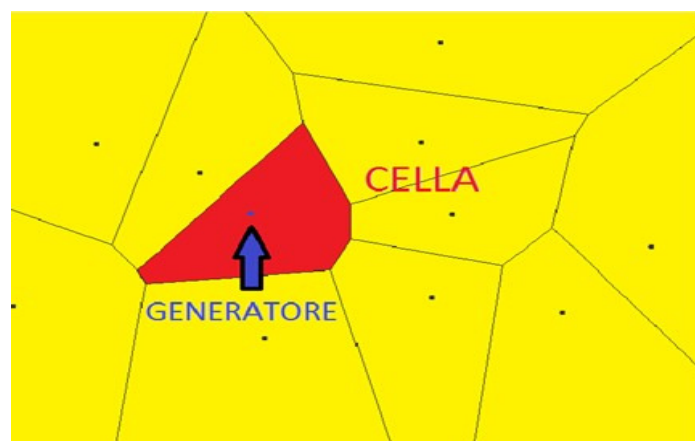
Grazie a queste tassellazioni si è ad esempio in grado di suddividere correttamente le varie aree di influenza di negozi, servizi, ospedali, etc.

Nel corso di questi incontri abbiamo analizzato ad una a una le diverse proprietà, le diverse tipologie di costruzione e le diverse modalità in cui possono apparire, anche in natura, le tassellazioni di Voronoi e ci siamo inoltre accorti che alcune di esse possono presentare forme particolari; per esempio si possono ottenere tassellazioni composte solo da esagoni regolari, o da quadrati, o altre forme ancora.

Per capire meglio la forma delle varie tassellazioni e per poterle rappresentare ci siamo serviti di alcuni siti internet che forniscono delle applicazioni per costruire tramite vari metodi tali tassellazioni; grazie ad alcuni di questi si può anche approfondire l'argomento con cenni più teorici che pratici.

Definizione

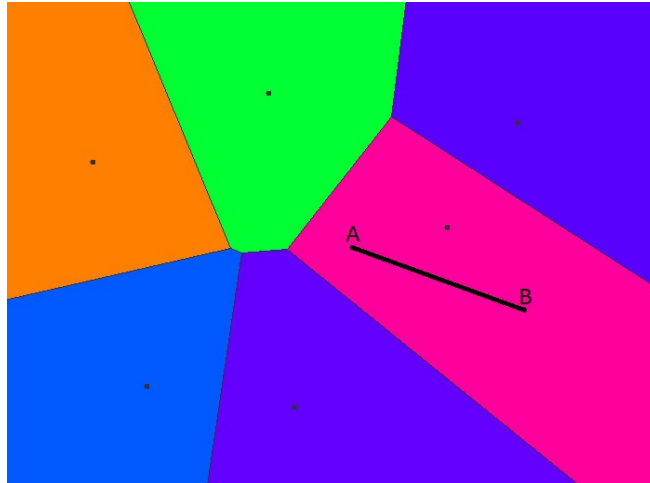
Una tassellazione di Voronoi suddivide il piano in celle che si determinano a partire da dei punti noti detti *generatori*. Un punto del piano appartiene alla cella associata a un generatore, quando la sua distanza da quel generatore è minore rispetto a quella che ha da tutti gli altri generatori.



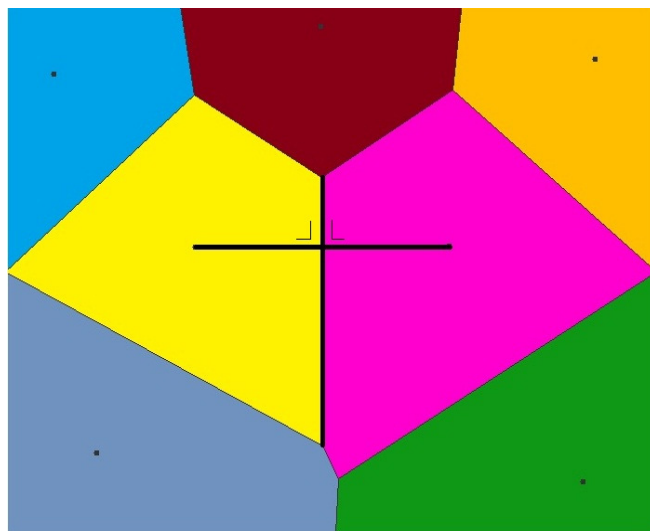
Proprietà

Dalla definizione si possono dedurre le seguenti proprietà:

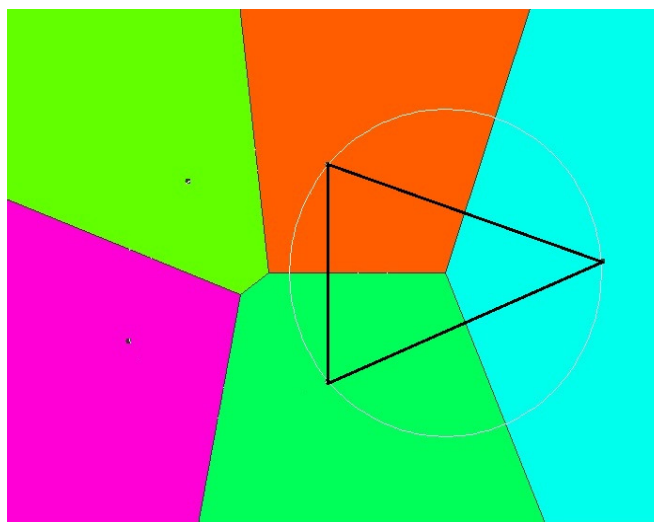
- ✧ *le celle della tassellazione sono convesse*: comunque presi due punti distinti all'interno di una stessa cella, infatti, il segmento che li unisce si trova all'interno della cella stessa.



- ✧ Preso il segmento che unisce due generatori e costruito l'asse di quel segmento, *il lato in comune delle due celle* si trovano su quell'asse.



- ✧ *I vertici della tassellazione sono i centri delle circonferenze* passanti per tre generatori e non aventi altri generatori al loro interno.

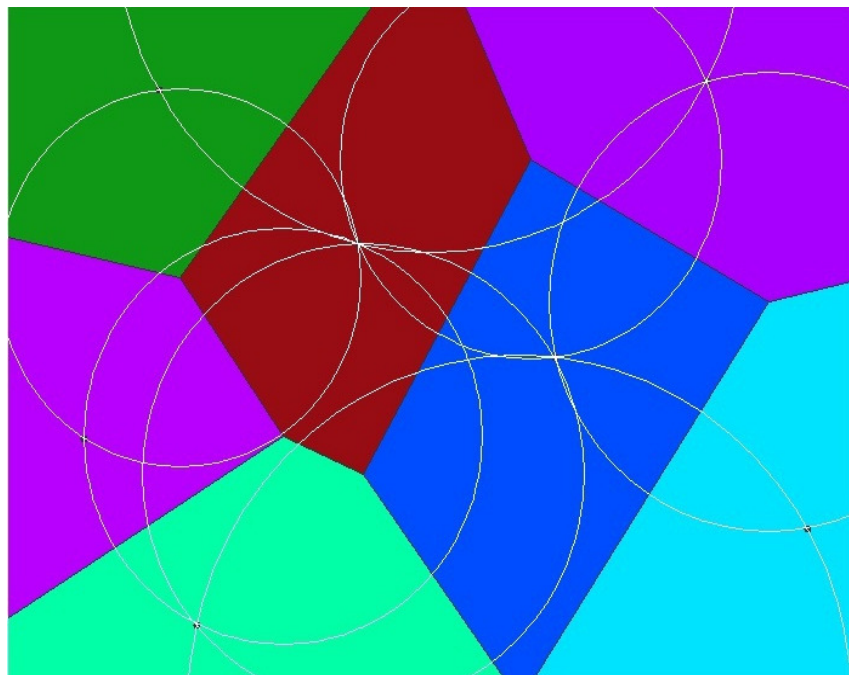


Costruzioni

Metodo delle circonferenze

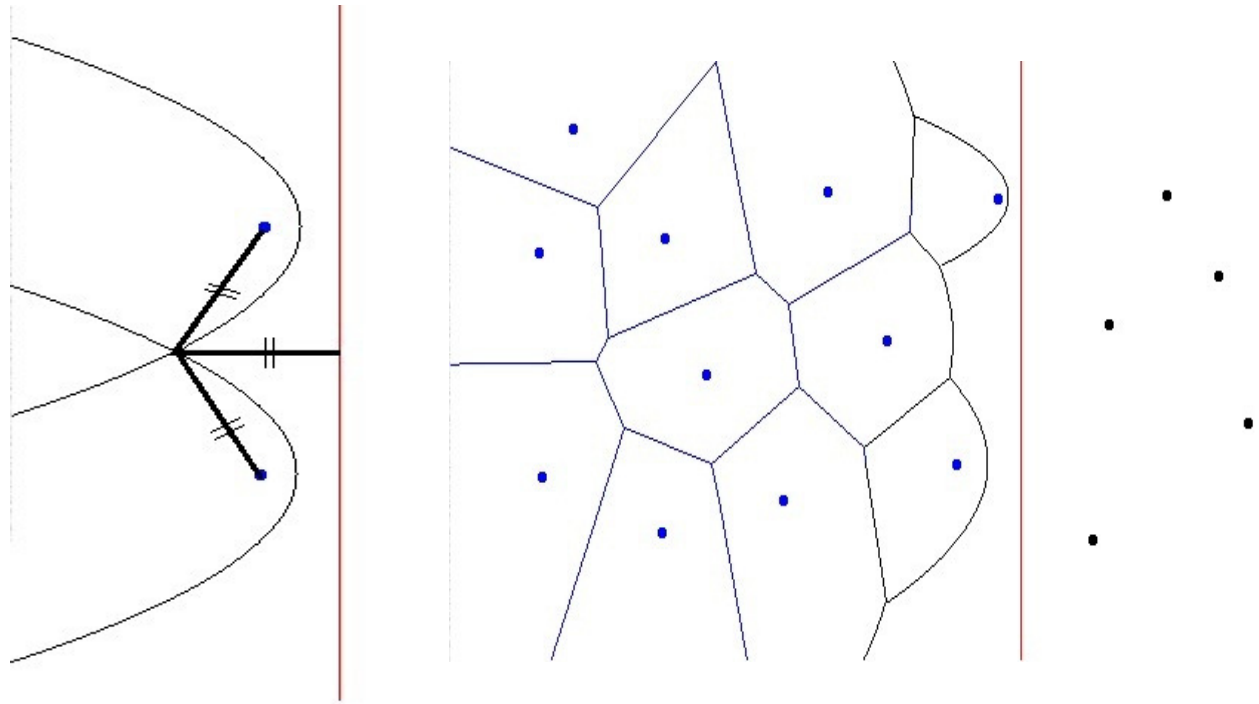
Sfruttando le proprietà della tassellazione, abbiamo trovato questo metodo di costruzione che si articola nei seguenti passi:

1. Si costruiscono tutte le circonferenze possibili passanti per tre generatori, in modo tale che il centro di queste, per definizione, sia equidistante dagli stessi punti e si trovi quindi sul vertice della cella dei generatori.
2. Il numero delle circonferenze possibili è il numero di possibili raggruppamenti a tre elementi dei generatori. Il numero è quindi $\binom{n}{3}$, dove n è il numero di generatori nel piano preso in considerazione.
3. Considerando che tutto avvenga nel piano cartesiano, si possono costruire le equazioni di tutte queste circonferenze e calcolarne il raggio.
4. Bisogna considerare poi solo le circonferenze che non contengono al loro interno generatori; si calcola quindi la distanza di un qualsiasi generatore dal centro di una circonferenza.
5. Se la distanza di tutti i generatori dal centro della circonferenza è maggiore o uguale al raggio, si tiene questa circonferenza, che avrà per centro un vertice della tassellazione.
6. Unendo i centri delle circonferenze si crea la tassellazione di Voronoi.



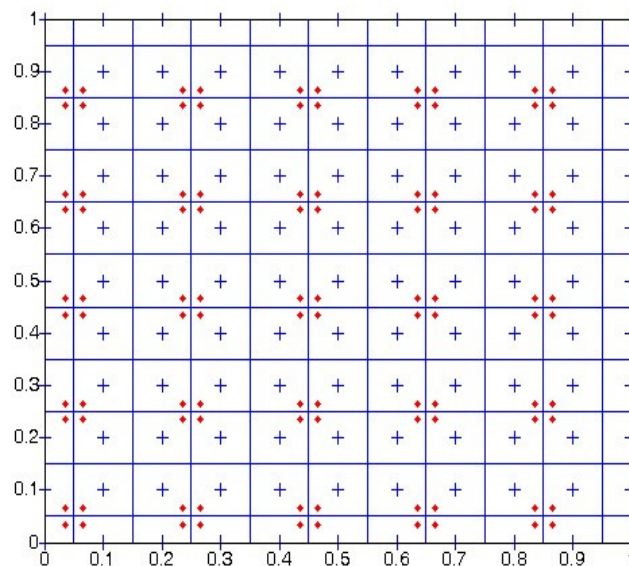
Metodo delle parabole

Dopo aver letto sulla rivista *XlaTangente* un articolo sulle tassellazioni di Voronoi in cui venivano costruite con questo metodo, ci siamo interessati e abbiamo cercato di capire di cosa si trattasse. La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice. Quindi se si sceglie una retta come direttrice e si costruiscono le parabole che hanno per fuochi i generatori, i punti di intersezione di due parabole saranno equidistanti da due generatori e apparterranno alla tassellazione di Voronoi. Facendo scorrere la retta si ottiene tutta la tassellazione di Voronoi e i suoi vertici sono dati dall'intersezione di tre parabole perché devono essere equidistanti da tre generatori.



Tassellazioni particolari

Disponendo i generatori ad intervalli regolari si possono ottenere tassellazioni regolari: ad esempio, disponendo i generatori come nella figura qui sotto si può ottenere una scacchiera. In questo modo ci siamo anche resi conto che *non c'è corrispondenza biunivoca* tra disposizione dei generatori e tassellazione ottenuta. Infatti una stessa tassellazione in alcuni casi può essere ottenuta disponendo i generatori in più modi diversi.



Le nostre considerazioni

Questo progetto è stato molto diverso da quanto ci eravamo aspettati all'inizio: credevamo, infatti, che si trattasse di lavori individuali coordinati dal ricercatore. Ci siamo

invece trovati davanti a un unico lavoro nel quale avremmo dovuto spaziare abbastanza liberamente in base alle nostre intuizioni.

Abbiamo trovato difficoltà nell'orientarci senza una guida e almeno inizialmente abbiamo avuto bisogno di uno spunto esterno. Successivamente ci siamo appassionati alla questione, trovando molto più coinvolgente questo metodo di "ricerca" rispetto alle lezioni frontali durante le normali lezioni scolastiche. Inoltre il lavoro di gruppo ha reso più stimolante l'argomento, facendoci rendere conto dell'importanza della Matematica nella vita quotidiana, anche se spesso non è così evidente.

Il giorno della presentazione siamo arrivati molto preparati, rimanendo entusiasti per l'interesse dimostratosi dalle persone presenti in quell'occasione.

Siamo contenti di questa esperienza perché ci ha permesso di vedere sotto una nuova luce la Matematica, sia quella che studiamo a scuola, sia quella che incontriamo nella vita di tutti i giorni.