Tasselliamo il piano

Consideriamo delle piastrelle aventi la forma di poligono regolare, tutte con i lati della stessa lunghezza. Come possiamo disporre queste piastrelle in modo da tassellare l'intero piano, facendo attenzione a non sovrapporle e a non lasciare spazi tra una piastrella e l'altra?

Scuola Media "Fermi" – Villasanta (MB)
Classe I D
Insegnante di riferimento: Prof.ssa marina Rossi
Ricercatore: dott. Alexandro Redaelli
Partecipanti: Daniele Carnevale, Giulia Cervo, Martina De Maria, Simona Fortunato, Chiara Fumagalli, Martina Garbin, Umberto Gaudioso, Vanessa Gentiluomo, Katia Htamla, Davide Mantegazza, Jacopo Lissoni, Kevin Mendoza Lozano, Francesca Motta, Mirko Nervi, Davide Netti, Nicholas Pascucci, Thomas Rotolo, Martina Rurali, Davide Toffali, Valentina Turati, Jeremy Zapata

Progetto Math.en.Jeans

Scuola Media “E. Fermi” – Villasanta (MB)

Classe 1ª D

Tasselliamo il piano

Insegnante di riferimento: Prof.ssa Marina Rossi
Ricercatore MATh.en.JEANS: Dott. Alexandro Redaelli

Abbiamo iniziato a lavorare al progetto il 24 novembre 2009, data in cui è venuto nella nostra scuola il dott. Alexandro Redaelli assegnatoci da MATh.en.JEANS.
Durante questo incontro il dott. Redaelli ci ha illustrato il problema al quale avremmo dovuto dedicarci: la tassellazione del piano. Lo scopo era quello di riempire un piano utilizzando dei poligoni regolari di vario tipo, aventi tutti la medesima misura del lato e in modo tale da non lasciare spazi o sovrapposizioni tra un poligono e l’altro.

Ci siamo subito divisi in gruppi di lavoro e abbiamo iniziato a disegnare su dei fogli, che rappresentavano il piano, dei triangoli equilateri.
Ci siamo accorti che quando raggiungevamo i bordi del foglio i triangoli rimanevano disegnati solo per una parte. Questo è stato il nostro primo problema: in che modo dovevamo immaginare il piano? Avevamo sempre considerato il piano come uno "spazio" delimitato, come un foglio, un banco, la cattedra. Così il ricercatore ci ha detto che, al di là delle limitazioni fisiche, dovevamo immaginare il piano come un foglio sempre più grande, infinito.
Nelle settimane successive abbiamo dedicato un'ora alla settimana (il giovedì) al progetto di ricerca.
Per prima cosa abbiamo costruito dei triangoli, dei quadrati e degli esagoni di lato 6 cm in compensato, li abbiamo colorati e ogni gruppo li ha usati per cercare di tassellare il piano. Abbiamo cercato di disporre le figure in modo tale che, quando due di esse si toccavano, avessero sempre un lato o un vertice in comune.
Utilizzando soltanto un tipo di poligono regolare siamo riusciti a costruire queste tassellazioni:

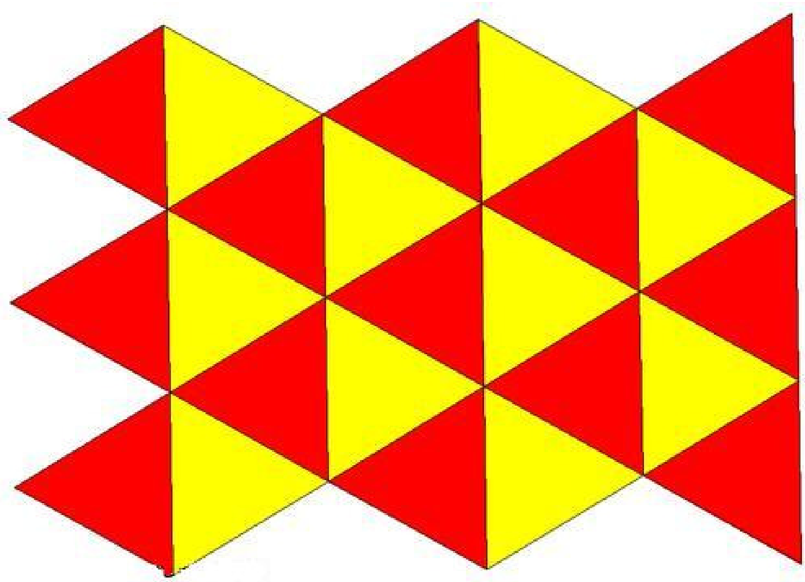

Figura 1: Utilizzando triangoli equilateri

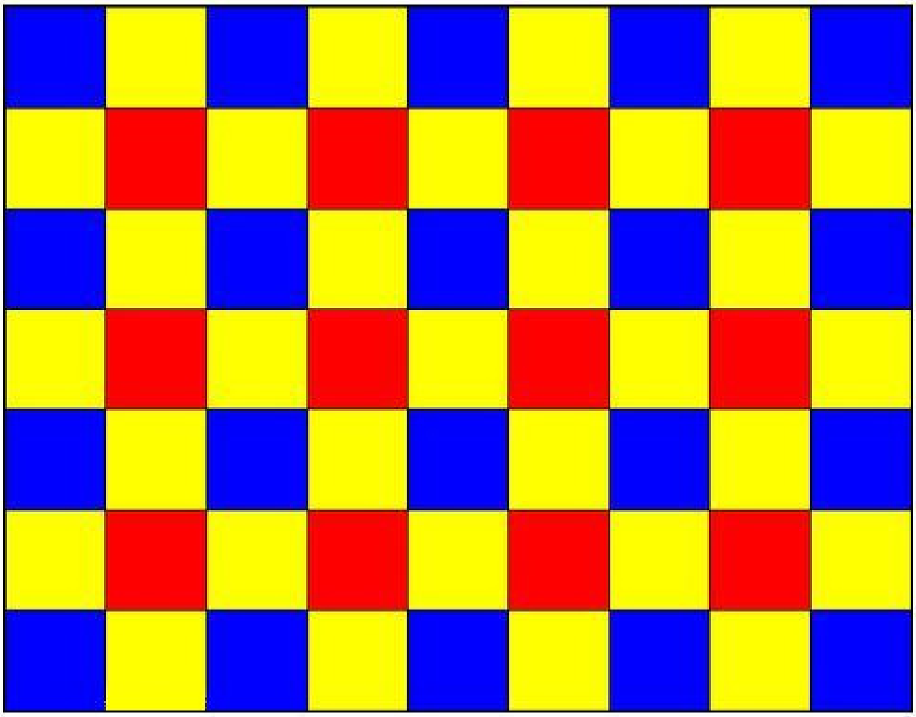

Figura 2: Utilizzando i quadrati

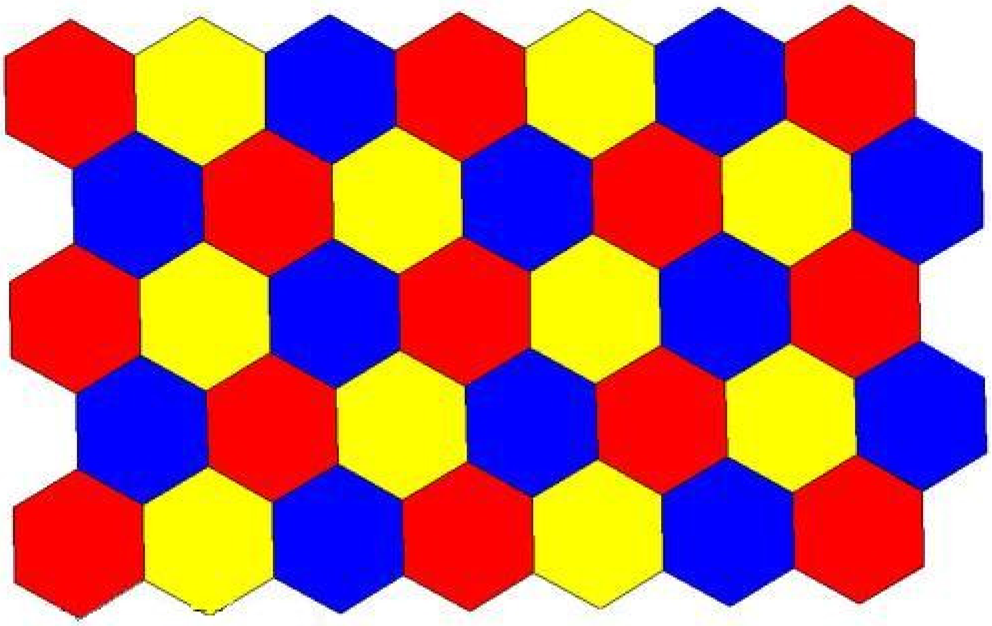

Figura 3: Utilizzando gli esagoni

Le tassellazioni così ottenute vengono chiamate **regolari** perché sono costituite da poligoni regolari tutti uguali.

Dopo aver tassellato con questi poligoni il piano, abbiamo provato a raccogliere le informazioni in una tabella:

Tipo di poligono regolare utilizzato	Numero di lati del poligono	Numero di facce che si uniscono in un vertice
QUADRATO	4	4
TRIANGOLO	3	6
ESAGONO	6	3

Possiamo notare che riusciamo a disporre attorno ad ogni vertice 4 quadrati oppure 6 triangoli oppure 3 esagoni.
Usando poligoni con 5 o più di sei lati (portati successivamente dal dott. Redaelli) non siamo riusciti ad ottenere delle tassellazioni regolari.
Le tassellazioni regolari possibili per un piano sono quelle che si ottengono utilizzando solo triangoli, quadrati o esagoni. Come mai?
Per rispondere a questa domanda abbiamo provato a compilare le due tabelle sottostanti, cercando una spiegazione.

Numero di lati del poligono regolare	3 (triangolo equilatero)	4 (quadrato)	5 (pentagono)	6 (esagono)
Ampiezza degli angoli al vertice	60°	90°	108°	120°

Numero di poligoni per ogni vertice della tassellazione	3	4	5	6	7	8
Ampiezza che dovrebbe avere l'angolo al vertice	360°:3=120°	360°:4=90°	360°:5=72°	360°:6=60°	360°:7≈51°	360°:8=45°
Esiste un poligono regolare con quest'angolo? Quale?	Sì, esagono regolare	Sì, quadrato	No	Sì, triangolo equilatero	No	No

Indichiamo con f il numero delle facce intorno ad ogni vertice e con n il numero dei lati del poligono regolare.

La somma di tutti gli angoli dei poligoni attorno ad ogni vertice deve essere uguale a 360°. Perciò sapendo che l'ampiezza di ogni angolo interno di un poligono regolare è data da:

$$\frac{180° \cdot (n-2)}{n}$$

possiamo dire che per costruire una tassellazione regolare si deve avere:

$$f \cdot \frac{180° \cdot (n-2)}{n} = 360°$$

Questa uguaglianza è verificata solamente con i valori:

$$n = 3, f = 6$$
$$n = 4, f = 4$$
$$n = 6, f = 3$$

che corrispondono ai valori riportati nella prima tabella.

Successivamente abbiamo cercato di tassellare il piano utilizzando diversi tipi di poligoni regolari (triangoli, quadrati, pentagoni, esagoni, ottagoni, decagoni). Dopo varie prove, il ricercatore ci ha suggerito di cercare di costruire delle tassellazioni in modo tale che attorno ad ogni vertice ci fossero, nell'ordine, sempre gli stessi tipi di poligoni e non ci fossero mai né spazi vuoti né sovrapposizioni. Le tassellazioni di questo tipo vengono chiamate **uniformi**.
Ecco cosa abbiamo trovato.

Un gruppo ha utilizzato triangoli e quadrati in due modi diversi e ha ottenuto:

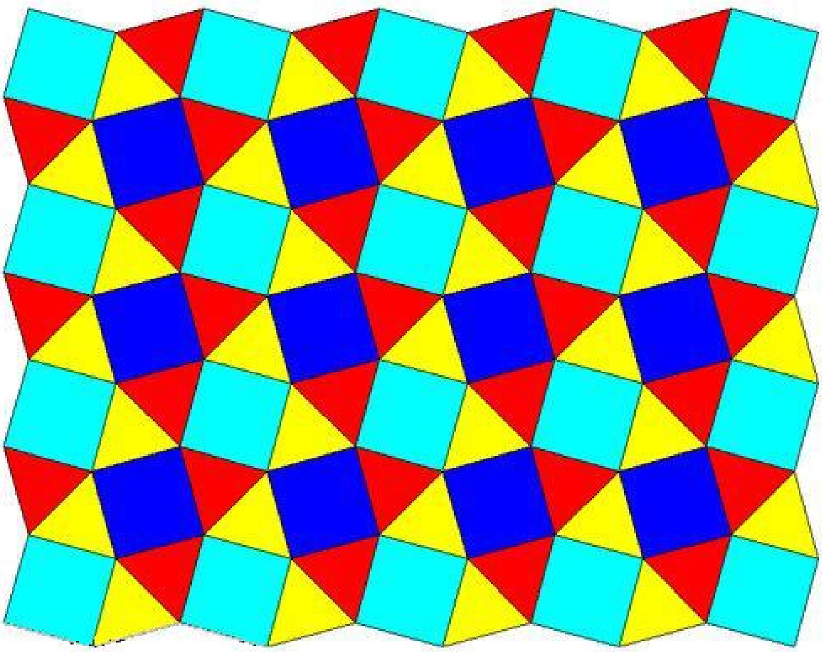

Figura 4: Utilizzando triangoli equilateri e quadrati

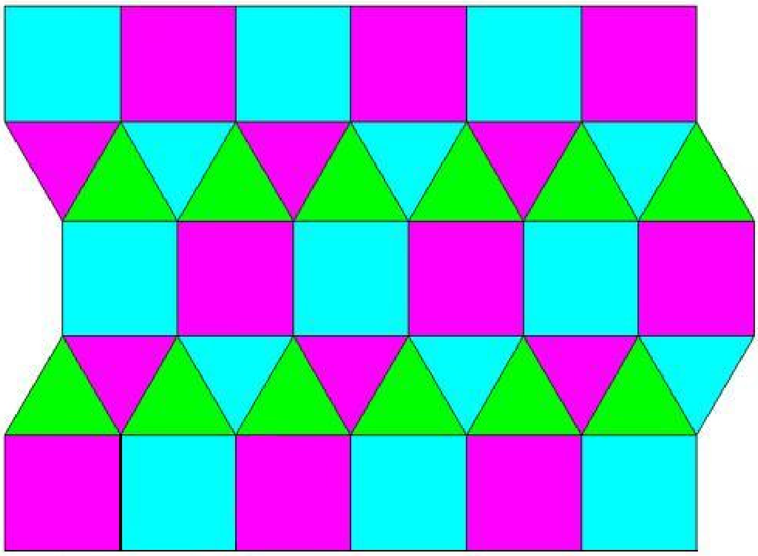

Figura 5: Utilizzando triangoli equilateri e quadrati

Un gruppo ha utilizzato esagoni e triangoli in due modi diversi:

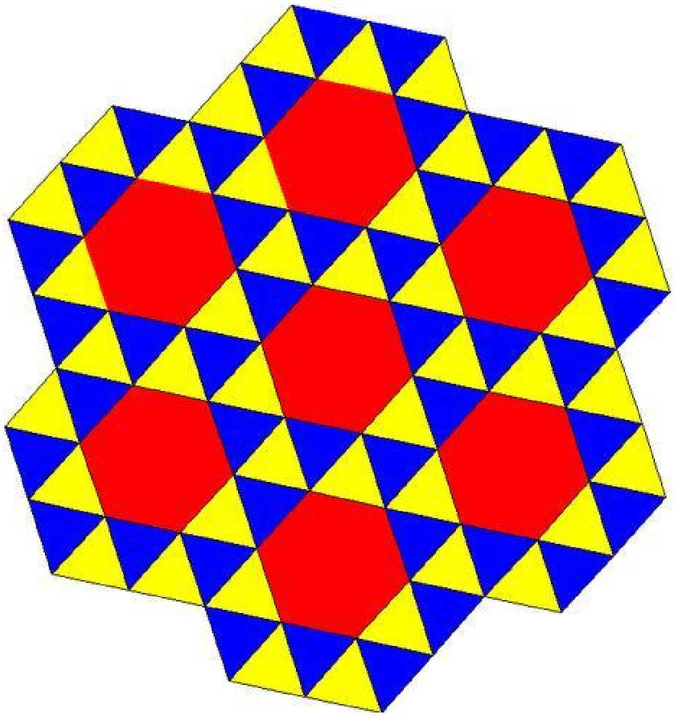

Figura 6: Utilizzando triangoli equilateri ed esagoni

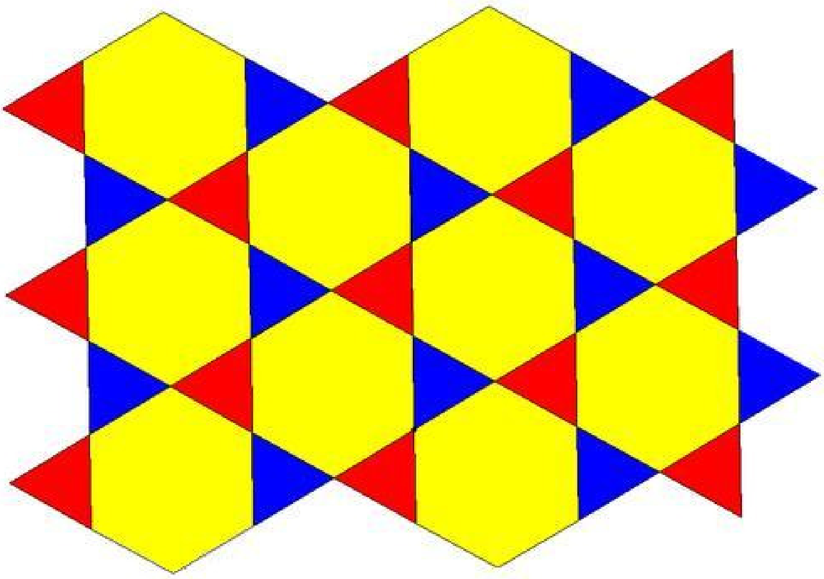

Figura 7: Utilizzando triangoli equilateri ed esagoni

Un gruppo ha utilizzato triangoli, quadrati ed esagoni ottenendo:

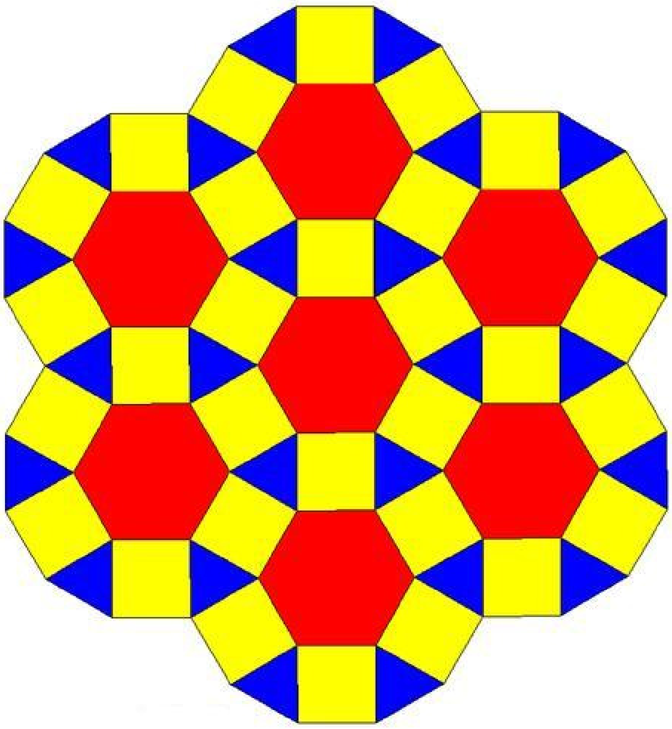

Figura 8: Utilizzando triangoli equilateri, quadrati ed esagoni

Un altro gruppo ha lavorato con ottagoni e quadrati trovando questa tassellazione uniforme:

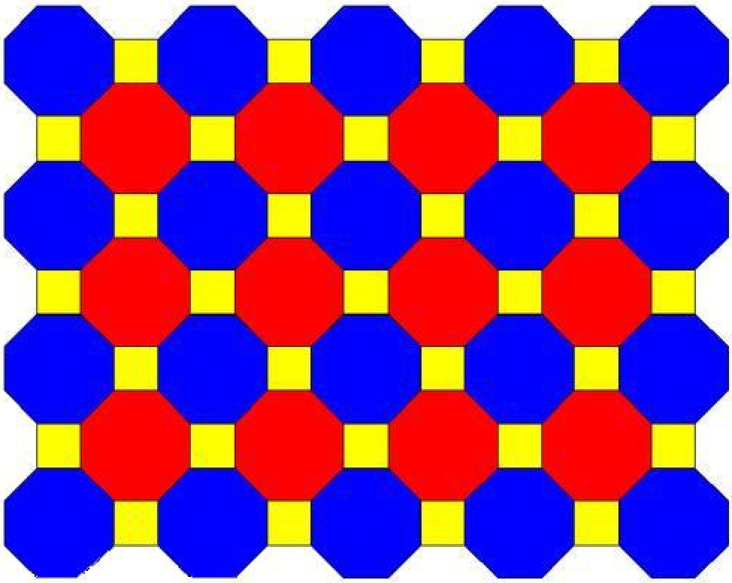

Figura 9: Utilizzando quadrati e ottagoni

Nelle tassellazioni costruite abbiamo messo attorno ad ogni vertice nell'ordine sempre lo stesso tipo di poligoni e non abbiamo mai avuto né spazi vuoti né sovrapposizioni.
Anche in questo caso abbiamo compilato una tabella:

Numero di facce per ogni vertice	Tipi di facce per ogni vertice (in ordine)	Misura degli angoli dei poligoni che arrivano in un vertice
4	Triangolo eq., esagono triangolo eq., esagono (3,6,3,6)	60° 120° 60° 120°
3	Quadrato, Ottagono, Ottagono (4,8,8)	90° 135° 135°
4	Triangolo eq., quadrato, esagono, quadrato (3,4,6,4)	60° 90° 120° 90°
5	Triangolo eq., quadrato triangolo eq., quadrato, triangolo eq. (3,4,3,4,3)	60° 90° 60° 90° 60°
5	Triangolo eq., triangolo eq., triangolo eq., triangolo eq., esagono (3,3,3,3,6)	60° 60° 60° 60° 120°
5	Triangolo eq., triangolo eq., triangolo eq., quadrato, quadrato (3,3,3,4,4)	60° 60° 60° 90° 90°

In tutti questi casi è possibile costruire tassellazioni uniformi. Inoltre, la somma di tutti gli angoli dei poligoni che arrivano in un vertice è sempre di 360°.
Abbiamo inoltre osservato che anche le tassellazioni regolari sono tassellazioni uniformi.
Nel caso delle tassellazioni uniformi però, non siamo riusciti a trovare una formula che spiegasse il perché ne abbiamo costruite solo 9 (6 più le 3 tassellazioni regolari).

Abbiamo anche provato con le tassellazioni regolari a modificare il poligono, per esempio un triangolo, ed ottenere delle tassellazioni "artistiche", come nell'esempio sotto riportato:

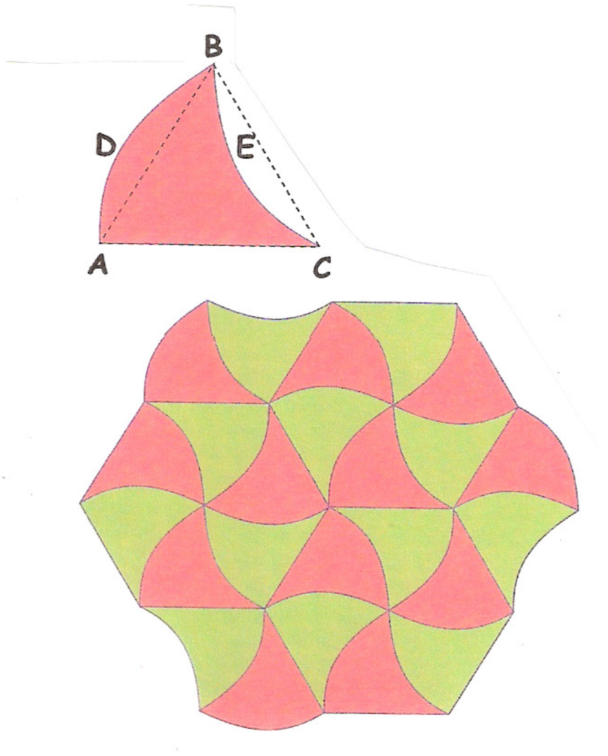

Figura 10: Esempio di costruzione di tassellazioni artistiche

Questo tipo di tassellazioni sono state utilizzate da M. C. Escher, grande artista olandese vissuto dal 1898 al 1972, nelle sue opere.