Tasselliamo il piano

Consideriamo delle piastrelle aventi la forma di poligono regolare, tutte con i lati della stessa lunghezza. Come possiamo disporre queste piastrelle in modo da tassellare l'intero piano, facendo attenzione a non sovrapporle e a non lasciare spazi tra una piastrella e l'altra?

Scuola Media "Monteverdi-Colorni" – Milano
Classe III B
Insegnante di riferimento: prof.ssa Claudia Manoussakis
Ricercatore: dott. Alexandro Redaelli
Partecipanti: Chester Abol, Erika Aguiari, Luca Cattaneo, Manuel Daniele, Annetta Ferreri, Matteo Froio, Elizabeth Hernandez, Elisabetta Hu, Paolo Romano, Alessandro Saglia, Edoardo Verzi

TASSELLANDO CON CABRI

PREMESSA DELL'INSEGNANTE DI RIFERIMENTO

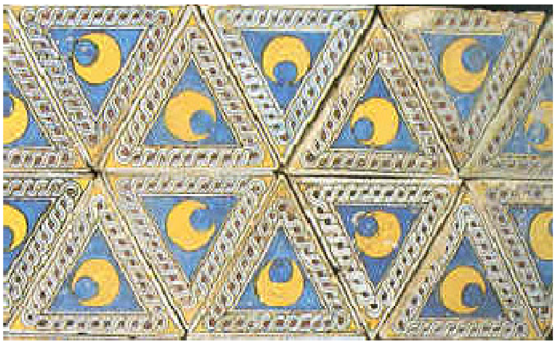
Ho aderito volentieri all'attività proposta da MATh.en.JEANS, sia per il riscontro molto positivo di mie passate esperienze, nelle quali la motivazione allo studio della matematica è "lievitata", sia grazie alla finalizzazione del lavoro da svolgere (produzione di una presentazione che esca dai confini della classe) e al metodo di ricerca che, partendo da un problema "grezzo", possibilmente concreto, permetta ai ragazzi di scoprire proprietà, regole, formule, cioè di matematizzare la realtà.

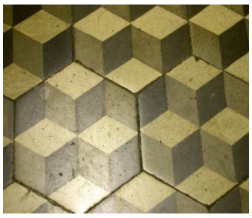
FASI

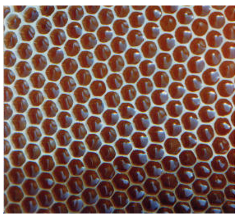
In presenza del tutor, si è proposto il tema:

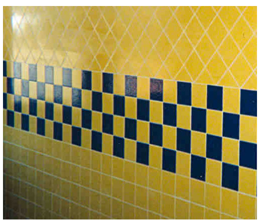
- ricoprire il piano con dei poligoni regolari, in modo da non avere sovrapposizioni né superfici scoperte,
- tutti i poligoni devono avere i lati della stessa lunghezza,
- se due poligoni si toccano, essi devono avere un lato o un vertice in comune.

Durante la discussione si sono cercati esempi da oggetti concreti: pavimenti (quadrati ed esagoni), piastrellature sulle pareti, favi delle api …

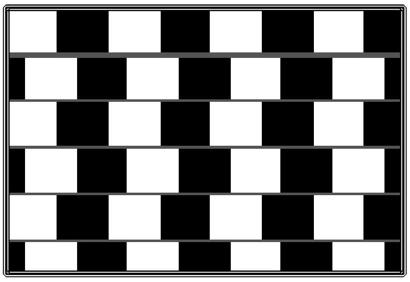








Mentre si esplora il web per cercare delle immagini, Alex S. si imbatte nelle illusioni ottiche e si incuriosisce del così detto "muro del caffè". Questo diventerà oggetto di approfondimento nel nostro lavoro, anche se non rispetta la terza condizione scritta precedentemente.



L'insegnante ha proposto di sviluppare il lavoro utilizzando il programma "Cabri Géomètre", che conisciamo e usiamo dalla prima media, soprattutto perché è possibile costruire poligoni regolari fino a 30 lati e permette di muovere facilmente le figure attraverso le isometrie.

Decidiamo di suddividere il lavoro in quattro sottotemi:

a) Tassellazioni con poligoni regolari con uguale numero di lati
b) Tassellazioni con poligoni regolari diversi
c) Isometrie e tassellazioni
d) Muro del caffè.

Ogni tema viene assegnato a un gruppo di due - tre e viene sviluppato autonomamente. L'insegnante e il ricercatore, quando è presente, controllano il lavoro suggerendo strategie o ponendo problemi.

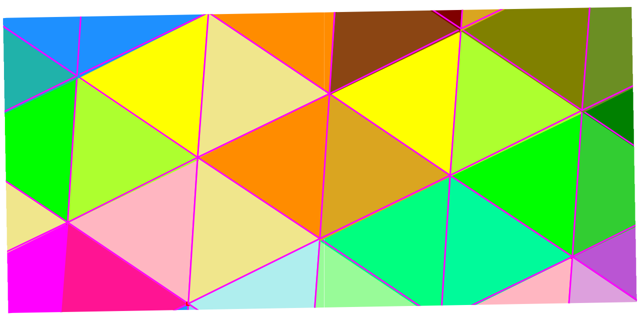
Gli incontri con il ricercatore servono a fare il punto della situazione e ad affrontare nuovi aspetti del problema; ad esempio, grazie all'uso dei modellini di poligoni, abbiamo scoperto le tassellazioni uniformi, che abbiamo riprodotto con Cabrì.

Gruppo A: Tassellazioni con poligoni regolari con uguale numero di lati (Edo, Luca, Chester)

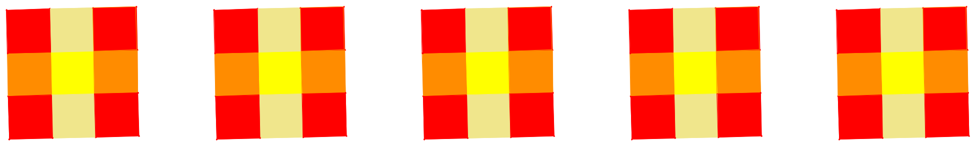
Il nostro gruppo ha il compito di stabilire quali poligoni regolari tutti congruenti possono tassellare il piano, se esistono regole e proprietà.

Dopo qualche tentativo casuale, abbiamo costruito le tassellazioni usando la riflessione ripettto a una retta; è stato facile allora scoprire che È POSSIBILE TASSELLARE IL PIANO CON POLIGONI REGOLARI TUTTI UGUALI SOLO IN TRE CASI:

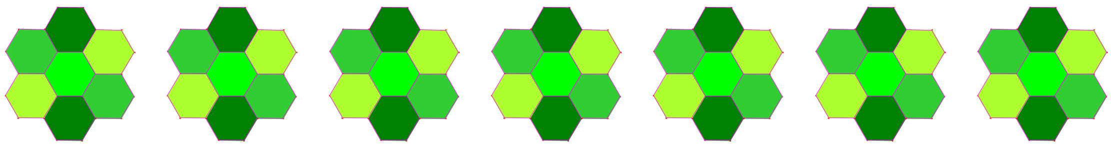
1. CON TRIANGOLI EQUILATERI (60° · 6)



2. CON QUADRATI (90° · 4)

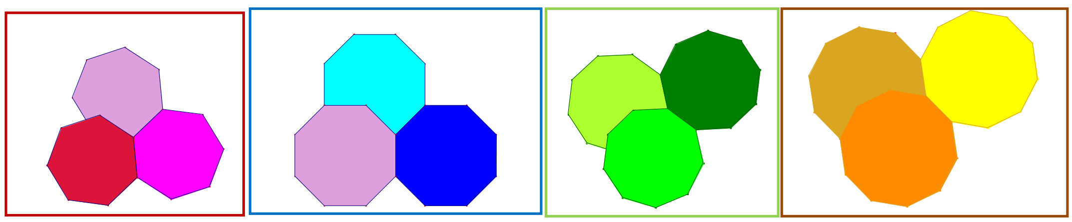


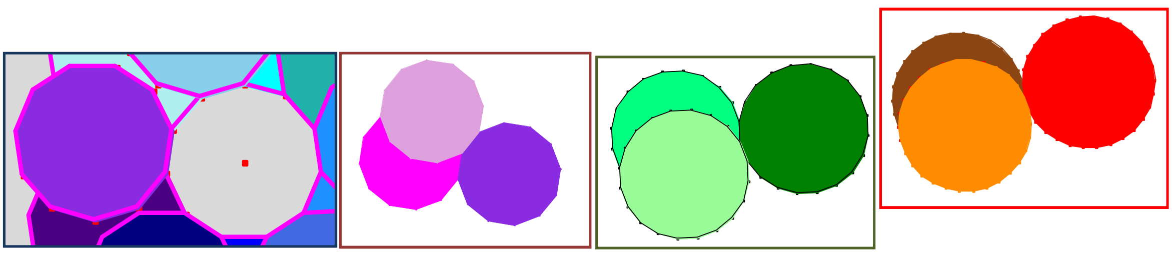
3. CON ESAGONI (120° · 3)



Abbiamo notato che 60°, 90°, 120° sono i soli sottomultipli di 360° che formano gli angoli dei poligoni regolari che possono tassellare il piano.

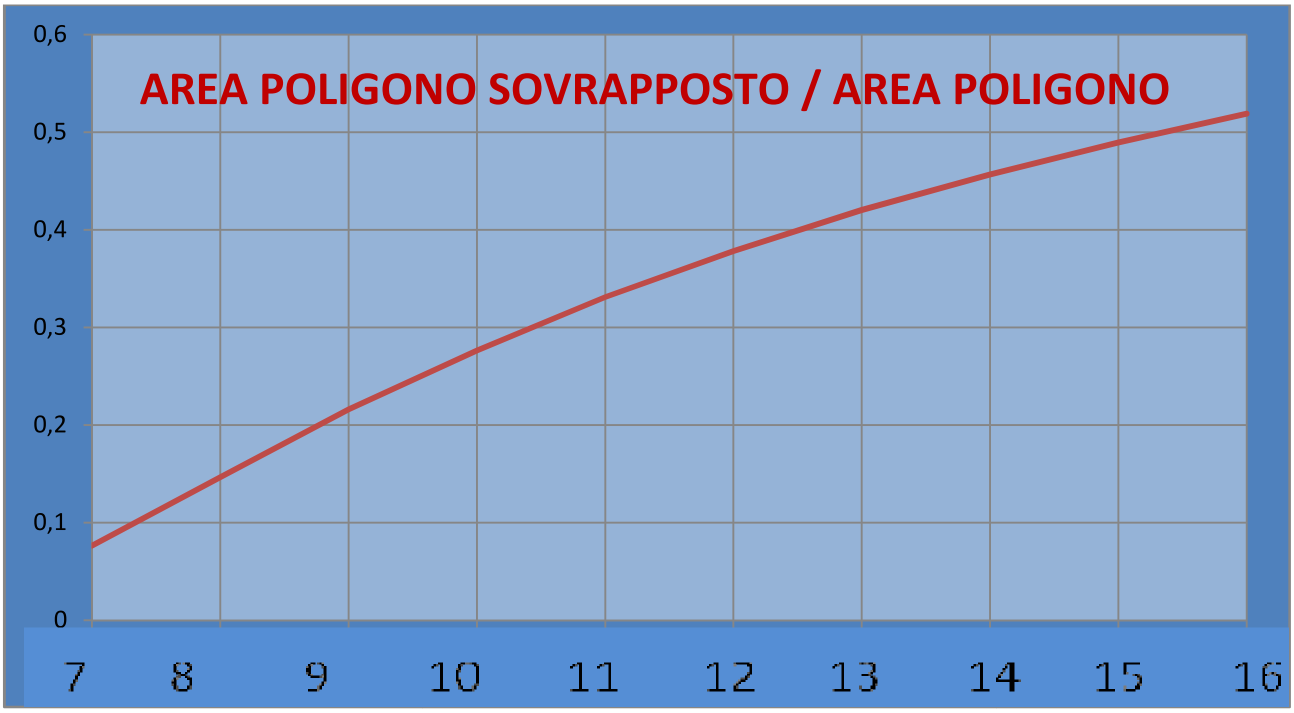
Con Cabrì, che disegna poligoni convessi fino a trenta lati, riesce facile osservare le sovrapposizioni dei poligoni con più di sei lati, ma solo dopo aver disposto i poligoni in ordine crescente per numero di lati, ci si accorge che nei poligoni con numero di lati dispari, due lati si intersecano nel loro punto medio mentre nei poligoni con numero di lati pari, due lati si intersecano in un vertice.





Osservando che l'area delle parti sovrapposte aumentava con l'aumentare del numero dei lati del poligono, l'insegnante ci ha suggerito di far calcolare a Cabri l'area dei poligoni e quella delle parti sovrapposte (basta ripassarne il contorno con il comando "poligono"). Così, ripassando i concetti di rapporto e di funzione, abbiamo messo in relazione il numero dei lati e il rapporto tra area della parte sovrapposta e quella del poligono regolare. Infine abbiamo costruito un grafico con Excel:

AREA PARTE SOVRAPPOSTA(A_S)	AREA POLIGONO REGOLARE(A_P)	N.LATI POLIGONO	AREA PARTE SOVRAPPOSTA/AREA POLIGONO
1,1	14,39	7	0,076
3,77	25,74	8	0,146
2,95	13,66	9	0,216
5,25	18,99	10	0,276
8,85	26,74	11	0,331
9,06	23,97	12	0,378
4,36	10,38	13	0,420
5,46	11,96	14	0,457
3,89	7,95	15	0,489
3,18	6,13	16	0,519
29,98	40,72	30	0,736



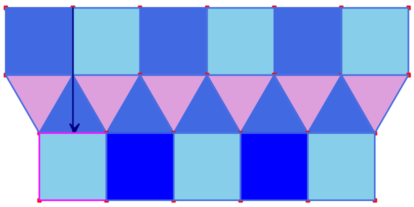
*** Excursus in 3D: introducendo i poliedri regolari, si è osservato che alcune “configurazioni” di poligoni regolari che non coprono interamente il piano, se uniti, “escono dal piano” e formano gli angoloidi dei solidi platonici:

- Tre pentagoni formano l’angoloide del dodecaedro
- Tre quadrati formano l’angoloide del cubo
- Cinque triangoli equilateri formano l’angoloide dell’icosaedro
- Quattro triangoli formano l’angoloide dell’ottaedro
- Tre triangoli formano l’angoloide del tetraedro

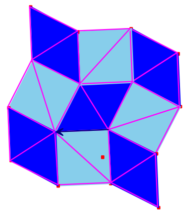
Gruppo B: Tassellazioni con poligoni regolari diversi (Paolo, Alex)

Il nostro gruppo ha affrontato il tema più complesso per le difficoltà di costruzione delle tassellazioni con poligoni regolari di diverso numero di lati, in cui è stato necessario ricorrere a più passaggi, impostando condizioni di parallelismo, perpendicolarità oppure scomponendo i poligoni in parti congruenti.

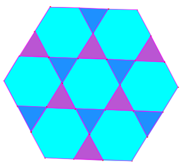
Abbiamo costruite alcune tassellazioni non uniformi e (quasi) tutte quelle uniformi. Ci siamo soffermati sulla proprietà dell'uniformità



QUADRATI E TRIANGOLI: 3,3,3,4,4

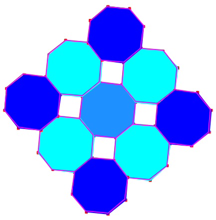


QUADRATI E TRIANGOLI: 3,4,3,4,3

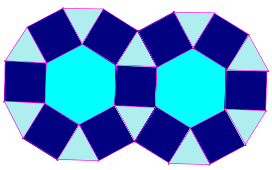


TRIANGOLI, ESAGONI

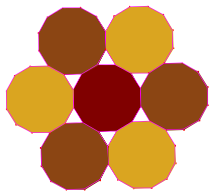
(3,6,3,6)



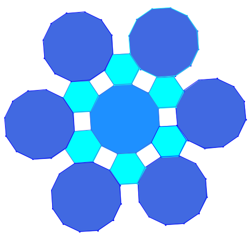
OTTAGONI, QUADRATI: 4,8,8



ESAGONI, QUADRATI, TRIANGOLI: 3,4,6,4



DODECAGONI, TRIANGOLI: 3,12,12



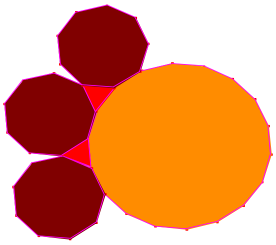
QUADRATI, ESAGONI, DODECAGONI: 4,6,12

1. Il numero dei poligoni attorno ad ogni vertice deve essere compreso tra 3 e 6.
2. La somma degli angoli dei poligoni nei vertici in comune deve essere uguale a 360°. Se la somma è maggiore di 360°, le figure si sovrappongono, se è minore, lasciano spazi vuoti.
3. Osservazione: i poligoni che tassellano in modo uniforme il piano, ad eccezione del triangolo, hanno un numero pari di lati.

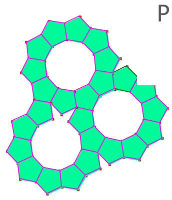
Si è reso necessario schematizzare e sistematizzare il lavoro per renderlo più completo. Si è così pensato di costruire una tabella in cui si elencavano tutte le possibilità di incastro, in base alla misura degli angoli dei poligoni regolari:

POLIGONO	n. lati	AMPIEZZA ANGOLO (IN GRADI)	COMBINAZIONI A 360° (le misure sono espresse in gradi)	NUMERO DI LATI DEI POLIGONI SU OGNI VERTICE	COMBINAZIONI A 360°		COMBINAZIONI A 360°	
TRIANGOLO	3	60	60 · 6	3,3,3,3,3,3	90 · 2 + 60 · 3	3,3,3,4,4	120 · 2 + 60 · 2	3,6,3,6
QUADRATO	4	90	90 · 4	4,4,4,4	90 · 2 + 60 · 3	3,4,3,4,3	90 + 135 · 2	4,8,8
PENTAGONO	5	108	108 + 108 + 144	5,5,10				
ESAGONO	6	120	120 · 3	6,6,6	60 + 90 + 120 + 90	3,4,6,4	60 · 2 + 120 · 2	3,3,6,6
ETTAGONO	7	128° 34' 28"						
OTTAGONO	8	135	135 + 135 + 90;	4,8,8				
ENNAGONO	9	140						
DECAGONO	10	144	144 + 156 + 60	3,10,15	108 · 2 + 144	5,5,10		
ENDECAGONO	11	147° 16' 21"						
DODECAGONO	12	150	150 · 2 + 60 ;	3,12,12	150 + 90 + 60 · 2	3,4,3,12	150 + 90 + 60 · 2	3,3,4,12
TREDICI LATI	13	152° 18' 27"						
QUATTORDICI LATI	14	154°17' 8"						
QUINDICI LATI	15	156	156 + 144 + 60	3,15,10				
SEDICI LATI	16	157° 30'						
DICIASSETTE LATI	17	158° 49'24"						
DICIOTTO LATI	18	160	160 + 140 + 60	3,9,18				
DICIANNOVE LATI	19	161° 3' 19"						
VENTI LATI	20	162	162 + 108 + 90	4,5,20				

In alcuni casi, però la regola 2 si è rivelata una condizione necessaria, ma non sufficiente: ad esempio con i pentagoni ed i decagoni, oppure con poligoni di 18 lati, ennagoni e triangoli. Ci siamo ostinati a cercare tutti i possibili incastri, senza risultato.



POLIGONI DI 18 LATI,
ENNAGONI E TRIANGOLI



PENTAGONI E DODECAGONI

Anche con l’aiuto del ricercatore abbiamo scoperto che quando ho tre poligoni attorno ad ogni vertice e uno di loro ha un numero dispari di lati, gli altri due poligoni devono avere lo stesso numero di lati.

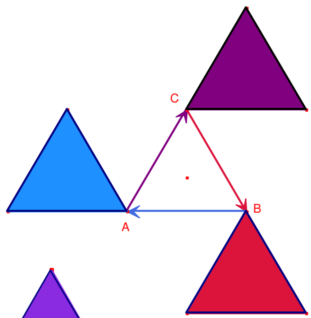
Gruppo C: Isometrie e tassellazioni (Matteo, Chester, Manuel)

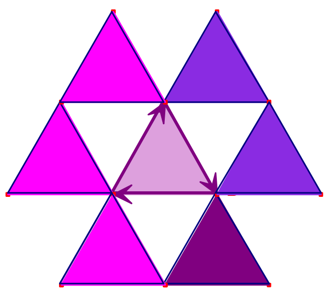
Abbiamo lavorato sulle tassellazioni regolari (quindi con triangoli equilateri, quadrati ed esagoni), per sapere se è possibile tassellare il piano con qualsiasi movimento rigido oppure no e con quali procedimenti. Manuel ha anche tentato di creare alcune animazioni con *Windows movie maker*, ma non siamo riusciti ad inserirle soddisfacentemente in PowerPoint.

L’unico caso in cui il piano non viene ricoperto interamente è la traslazione del triangolo equilatero. In tutti i casi, si è cercato il minimo numero di passaggi necessari per ricoprire il piano.

TASSELLARE CON TRASLAZIONI E CABRI:

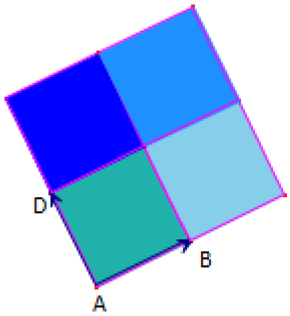
1. DISEGNA IL TRIANGOLO ABC
2. DEFINISCI IL VETTORE AC
3. TRASLA ABC DEL VETTORE AC
4. DEFINISCI IL VETTORE CB
5. TRASLA ABC LUNGO IL VETTORE CB
6. DEFINISCI IL VETTORE BA
7. TRASLA ABC DEL VETTORE BA
8. RIPETI LE TRASLAZIONI SUI NUOVI TRIANGOLI





Si osserva che, proseguendo in questo modo, il triangolo CBC’ risulta “vuoto”: non si può ottenere con una traslazione del triangolo di partenza.

TASSELLARE TRASLANDO QUADRATI



DISEGNA UN QUADRATO

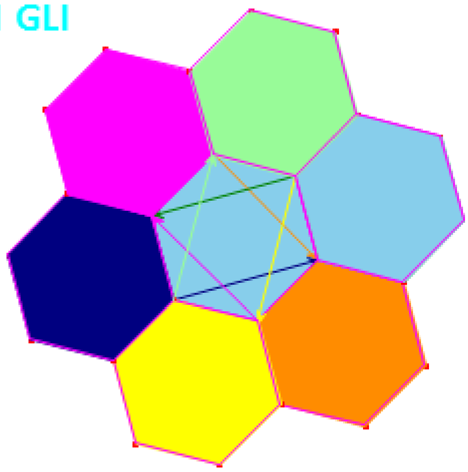
DEFINISCI I VETTORI AB, AD

TRASLA IL QUADRATO LUNGO I VETTORI

RIPETI CON I QUADRATI OTTENUTI

TRASLAZIONE CON GLI ESAGONI

1. DISEGNA L'ESAGONO
2. DEFINISCI I VETTORI AE, FB, CE, DB, FD, CA (DIAGONALI MINORI dell' esagono)
3. TRASLA L'ESAGONO LUNGO I VETTORI DEFINITI
4. PER OGNUNO DEGLI ESAGONI OTTENUTI TRASLA DI NUOVO



TASSELLARE CON ROTAZIONI E CABRI:

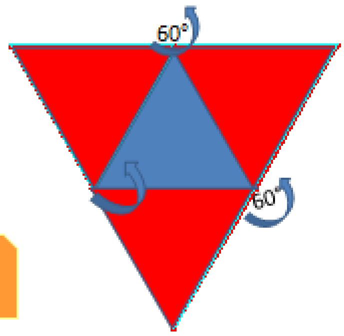
TASSELLAZIONE CON LA ROTAZIONE DI TRIANGOLI EQUILATERI…

DISEGNO IL TRIANGOLO

DEFINISCO L'ANGOLO DI ROTAZIONE (60°)

RUOTO IL TRIANGOLO ATTORNO AD OGNI VERTICE

RIPETO SUI TRIANGOLI OTTENUTI



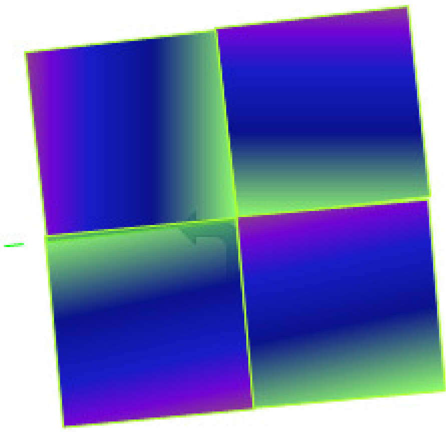
Tassellare ruotando quadrati….

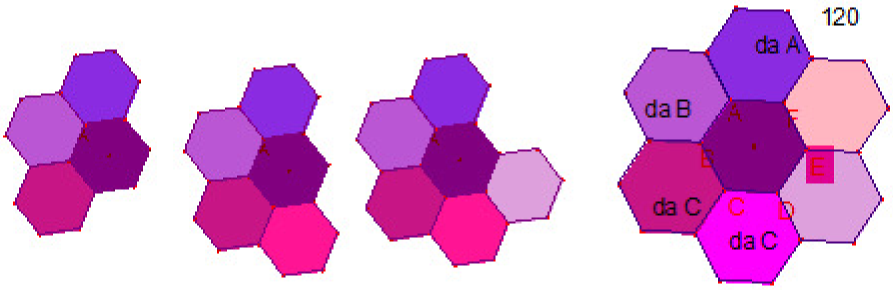
DISEGNO UN QUADRATO

DEFINISCO L'ANGOLO DI ROTAZIONE (90°)

RUOTO IL QUADRATO ATTORNO AD OGNI VERTICE DI 90°

RIPETO SUI NUOVI QUADRATI

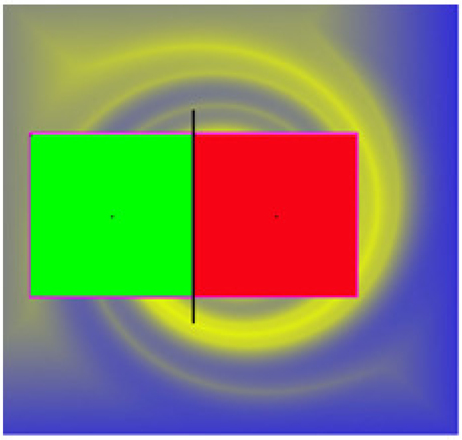




<u>TASSELLARE CON RIFLESSIONI E CABRI:</u>

Tassellare quadrati con la riflessione

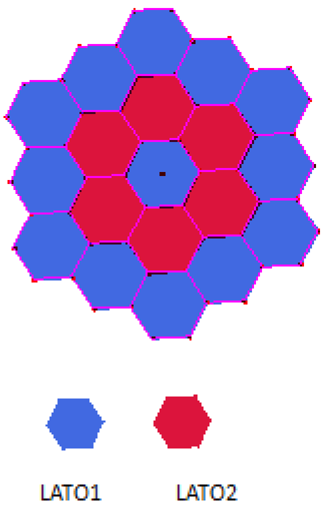
1. Disegna il quadrato
2. Esegui la riflessione assumendo come assi i lati del quadrato
3. Rifai il procedimento anche sui nuovi quadrati



TASSELLARE RIBALTANDO ESAGONI

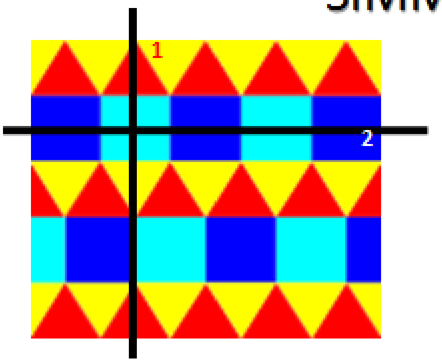
1. **DISEGNA L'ESAGONO**
2. **RIFLETTI L'ESAGONO ATTORNO A CIASCUN LATO**
3. **RIPETI CON GLI ESAGONI RIFLESSI SUI LATI LIBERI (3)**

IN REALTÁ SONO POSSIBILI VARIE PROCEDURE



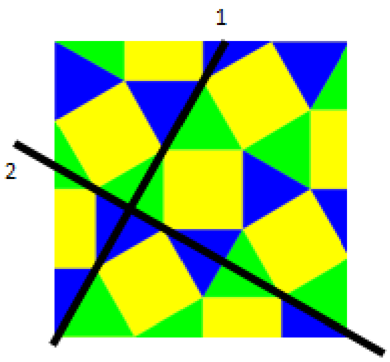
Successivamente abbiamo cercato gli assi di simmetria nelle tassellazioni uniformi, con i lavori eseguiti dal gruppo 2.

ALLA RICERCA DEGLI ASSI DI SIMMETRIA

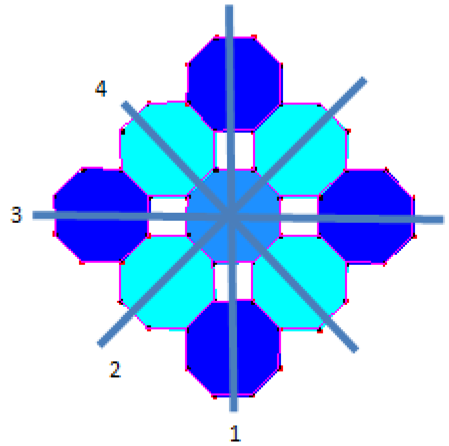


Gli assi di simmetria sono di due tipi (a meno di traslazioni)

1. passa dai punti medi dei lati dei quadrati di una fila, dagli assi dei triangoli, e dai lati dei quadrati della fila successiva
2. Attraversa i punti medi dei lati dei quadrati non in comune con i triangoli

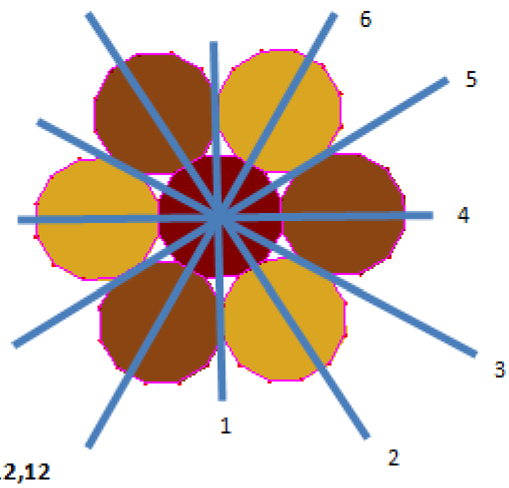


- Gli assi di simmetria passano lungo il lato comune di due triangoli e la mediana (anche altezza, bisettrice, asse…) degli altri due triangoli; non attraversano i quadrati
- Sono 2, a meno di traslazioni



GLI ASSI DI SIMMETRIA SONO 4 (A MENO DI TRASLAZIONI) E PASSANO

- PER I PUNTI MEDI DEI LATI OPPOSTI DEI QUADRATI E DEGLI OTTAGONI (1, 3)
- PER I PUNTI MEDI DEI LATI OPPOSTI DEGLI OTTAGONI (2, 4)

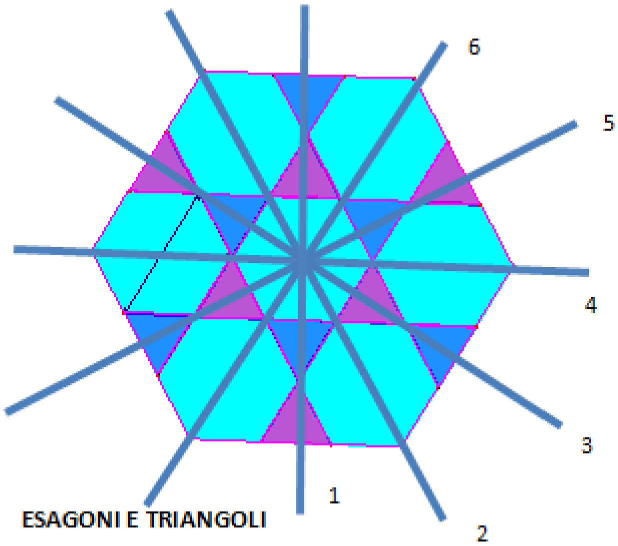


3,12,12

•SONO SEI (A MENO DI TRASLAZIONI) E PASSANO:

•LATO DEL DODECAGONO, MEDIANA DEL TRIANGOLO (1, 3, 5)

•PUNTI MEDI DEI LATI OPPOSTI DEL DODECAGONO (2, 4, 6)

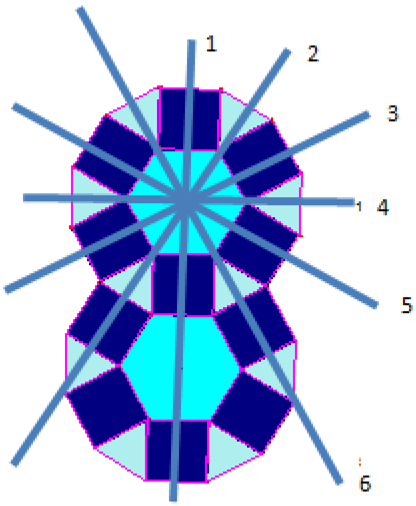


ESAGONI E TRIANGOLI

•SONO SEI (A MENO DI TRASLAZIONI) E PASSANO:

•MEDIANE DEI TRIANGOLI, PUNTI MEDI DEI LATI OPPOSTI DEGLI ESAGONI (1, 3, 5)

•VERTICI OPPOSTI DEGLI ESAGONI (2, 4, 6)



ESAGONI, QUADRATI, TRIANGOLI

SONO SEI E PASSANO PER

•PUNTI MEDI DEI LATI OPPOSTI DEI QUADRATI E DEGLI ESAGONI (1, 3, 5)

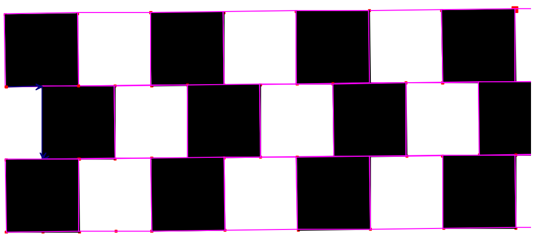
•ASSI TRIANGOLI, VERTICI OPPOSTI ESAGONI (2, 4, 6)

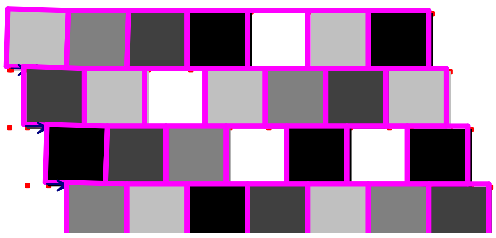
Gruppo D: Muro del caffè (Annetta, Erika, Elisabetta ed Elizabeth)

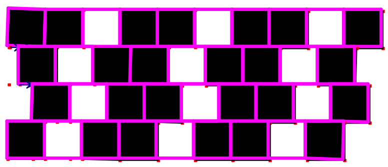
Il nostro gruppo aveva compito di studiare il muro del caffè, di studiare come costruirlo con Cabri, di provare ad elaborare alcune varianti, di provare a alternare i colori in modo diverso, di provare a aumentare o diminuire le strisce tra una fila e l'altra, di provare a usare poligoni diversi dal quadrato valutando l'effetto ottico.

Il café wall illusion è stato segnalato da Richard L. Gregory e Priscilla Heard nel 1979.

Un giorno, un membro del laboratorio di Gregory a Bristol, in Inghilterra, notò che la parte anteriore di un caffè locale era stata decorata con delle piastrelle di colore nero e bianco di ceramica. La malta tra i filari adiacenti di piastrelle era evidente, e l'alternarsi di nero/bianco era controbilanciato dallo spostamento di mezza piastrella della fila successiva. L'illusione è stata abbastanza impressionante da giustificare ulteriori studi.

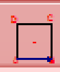
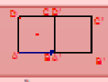
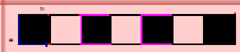
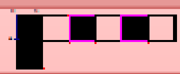
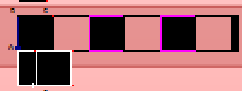
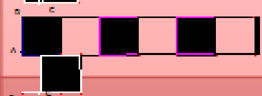
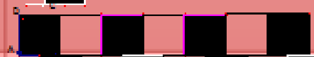






Le rette orizzontali non sembrano parallele a causa dell'alternarsi dei colori bianco e nero e della "sfasatura" tra le piastrelle

Ovviamente, per costruire il muro con Cabri, è stato necessario elaborare strategie, riflettendo sugli effetti delle isometrie.

COME SI COSTRUISCE IL MURO DEL CAFFÈ CON CABRÍ	
Poligono regolare: quadrato ABCD	
Definisci il vettore $\overrightarrow{AB}$	
Traslazione di ABCD, vettore $\overrightarrow{AB}$: A'B'C'D'	
Ripeti 6 volte	
Torna ad ABCD	
Vettore: lunghezza= l_{ABCD} direzione: $\overrightarrow{DA}$	
Traslazione di ABCD, vettore DA: A"B"C"D	
Trasla A"B"C"D" con vettore: lunghezza= ½ l_{ABCD} e direzione $\overrightarrow{AB}$	
A'''B'''C'''D'''; nascondi A"B"C"D"	
Trasla di $\overrightarrow{AB}$ 6 volte