Verso l'infinito e oltre

Quanti elementi ha l'insieme dei numeri naturali?
Sono di più o di meno dei numeri reali compresi tra 0 e 1?

Scuola secondaria di I grado – I.C. di Carnate (MB)
Classe: III B
Insegnante di riferimento: prof.ssa Mirella Cogliati
Ricercatore: dott. Nicola Abatangelo
Partecipanti: Samantha Argento, Federico Brambilla, Erica Bresciani, Francesco Calvio, Alex D'Andrea, Savino Di Troia, Veronica Ferrari, Arianna Foti, Martina Francesca, Francesco Mazzeo, Ergert Neza, Gaia Spinelli.

Noi alunni della classe 3°B dell'Istituto Comprensivo di Carnate siamo molto lieti e onorati di aver preso parte al progetto intitolato: "Verso l'infinito e oltre".
Con la supervisione del dottor Nicola Abatangelo e l'aiuto della professoressa Mirella Cogliati, abbiamo messo in gioco tutte le nostre conoscenze sulla Matematica.
Il problema che ci è stato posto era quello di stabilire se l'insieme dei numeri naturali, che indichiamo con N, contiene la stessa quantità di elementi dell'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1, che indichiamo con I; in caso di risposta positiva, bisognava fornire un accoppiamento adeguato o, in caso di risposta negativa, dimostrare che tale accoppiamento non esiste.
Tutta l'attività è stata una vera impresa!

Quando il nostro tutor, il dottor Nicola Abatangelo, ci ha presentato il problema per la prima volta, sono venute fuori cose che quasi nessuno di noi avrebbe mai pensato, come ad esempio che esistono infiniti diversi.

Da quel momento abbiamo ragionato sull'infinito e quasi ogni giorno portato nuove idee e domande.

... allora cos'è l'infinito?
Forse un numero? Probabilmente no, perché chiunque sappia contare potrebbe sempre sommare a quel numero una unità (1) e otterrebbe sempre lo stesso numero, cioè infinito.
Allora è una parola? Nemmeno questa sarebbe una soluzione adeguata perché sappiamo che in matematica le parole hanno un significato ben preciso; ci basterebbe allora cercare la definizione e avremmo già risolto il nostro problema.

… pensandoci bene potremmo paragonarlo allo spazio!
L'infinito e lo spazio hanno molte cose in comune:
- non si sa dove iniziano e dove finiscono
- oltre un certo punto non li si può esplorare
- non si sa con precisione cosa e quanti elementi contengano

… questo problema dell'infinito ci ha portato a ragionare su tantissime cose e siamo riusciti a collegarlo anche alla geometria!

Pensiamo a 2 o più circonferenze di raggio diverso: quanti punti hanno? Ovvio, infiniti... Quindi, probabilmente, anche i nostri 2 infiniti sono uguali e contengono lo stesso numero di elementi.
Purtroppo non è stato così facile arrivare alla soluzione del problema e, dopo aver discusso molto, siamo arrivati alla conclusione (corretta, ma in quel momento ancora infondata e senza prove certe) che l'infinito di I è più potente di quello di N.

L'impresa è stata un vero viaggio e queste sono state le tappe che insieme abbiamo percorso.

- Prima tappa

Durante la prima tappa abbiamo cercato una corrispondenza biunivoca, ossia abbiamo cercato di vedere se riuscivamo ad accoppiare gli elementi di N, cioè gli elementi con cui quotidianamente contiamo (1, 2, 3, 4, 5, ecc...), con gli elementi di I, insieme contenente anche altri numeri: razionali, irrazionali...
Dopo aver capito con molta delusione, che la corrispondenza che avevamo trovato non era biunivoca, abbiamo pensato ad un'altra soluzione.

- Seconda tappa: il metodo $\frac{1}{N}$

Prendiamo tutti gli elementi di N e facciamone l'inverso.
Ad ogni elemento di N corrisponde sempre un elemento in I, ma…

Osservazione della classe: pur avendo esaurito tutti i numeri di N, non siamo riusciti ad individuare tutti gli elementi di I.

Ad esempio, tra 1/2 e 1 nell'insieme I non ci sono elementi che il nostro procedimento riesca ad individuare.

- Terza tappa: il metodo 0,*N*

Abbiamo preso ogni elemento di N e abbiamo messo davanti "0,". In questo modo, ad ogni elemento di N corrisponde un elemento di I. Pur avendo esaurito tutti i numeri di N, tuttavia, non siamo riusciti ad individuare tutti gli elementi di I; ad esempio non siamo riusciti ad individuare nessun elemento fra 0 e 0,1 in I.

- Quarta tappa: il metodo degli zeri significativi

Federico ha ragionato sul perché questi metodi non funzionassero ed è giunto alla conclusione che la "colpa" è del diverso valore dello 0 in N e in I.
In N, infatti, lo 0 ha valore se posto alla destra del numero (10, 100, 1230,…), ma non ne ha se è posto a sinistra (01, 001, 00123...).

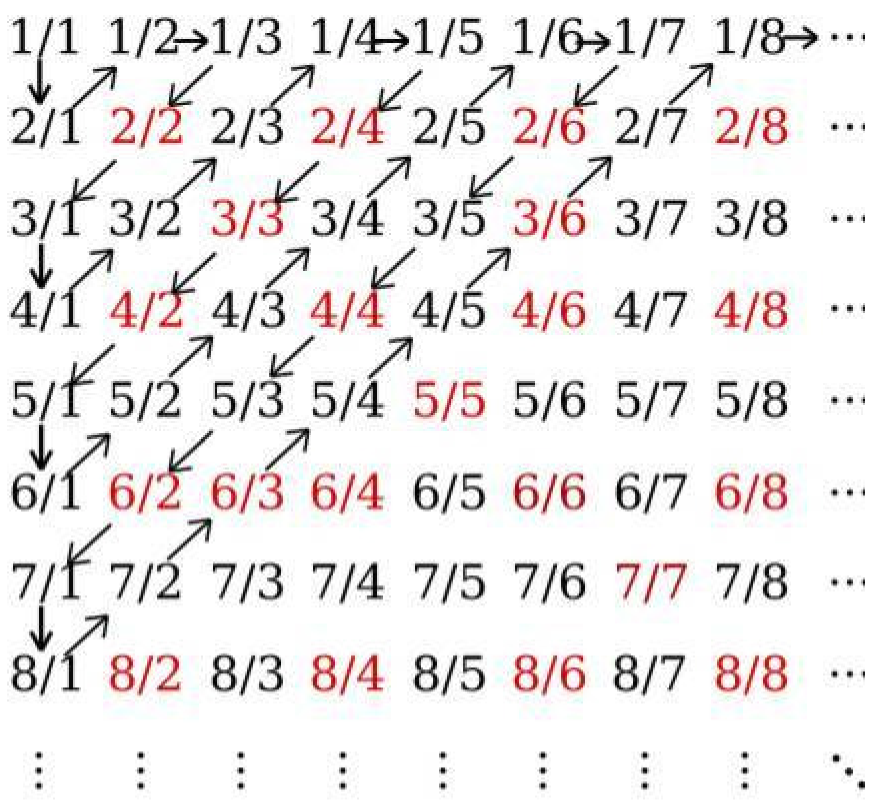
In I invece è l'opposto: lo 0 ha valore a sinistra (0,001; 0,00122;…), ma non ne ha a destra (0,10; 0,12700;...).

Quindi abbiamo capito che bisognava dare valore allo zero anche quando nell'accoppiamento "0,N" non ne aveva; in conclusione abbiamo fornito questo nuovo accoppiamento: *n* si accoppia ad 0,n, ma quando in *n* lo zero è a destra in 0,*n* va a sinistra, cioè: 1 si accoppia con 0,1 mentre 10 si accoppia a 0,01.
Pur avendo esaurito tutti i numeri di N, non siamo riusciti ad individuare tutti gli elementi di I: ad esempio non siamo riusciti ad individuare nessun numero periodico.

- Quinta tappa: mettere in fila i razionali

Studiando il nostro problema abbiamo scoperto un metodo per contare i razionali.

In questo modo, dopo aver eliminato i numeri uguali, possiamo far corrispondere ad ogni razionale un elemento dell'insieme N.



Ma, ancora una volta, pur avendo esaurito tutti i numeri di N, non siamo riusciti ad individuare tutti gli elementi di I: ad esempio non siamo riusciti ad individuare nessun numero irrazionale contenuto in I.

- Sesta tappa: fare una lista di irrazionali

Abbiamo fatto questo lavoro con l'aiuto di un foglio a quadretti che ci ha fornito Nicola. Supponendo di avere due liste infinite di numeri accoppiati in corrispondenza biunivoca, una di N e una di I,

1	0,8434890...
2	0,857475...

e così via...,

possiamo dimostrare che vi sono sempre dei numeri di I non accoppiati con un numero di N.
Basta cambiare per ogni numero una cifra; per esempio: nel primo numero la prima cifra dopo lo 0 è 8, quindi basta cambiarla con una qualsiasi altra cifra, come 4; nel secondo numero la seconda cifra è 5 e la si cambia con una qualsiasi altra cifra, e così via.
Ci siamo resi conto in questo modo che non siamo in grado di mettere in fila gli elementi di I come abbiamo fatto con i razionali.
Quindi possiamo affermare che I è un infinito diverso da N (i libri dicono che I è più potente di N).

Per preparare l'esposizione al convegno, abbiamo lavorato molto su una presentazione in *PowerPoint*, su dei cartelloni e sull'esposizione orale di tutto il lavoro.
Al convegno di MeJ abbiamo esposto il nostro problema e la nostra conclusione. Eravamo molto incerti, ma alla fine, nonostante la paura di parlare in pubblico, le parole fluivano dalla nostra bocca a una velocità incredibile.
L'esposizione orale è stata utile anche perché ci ha fatto sentire più sicuri di noi, il che ci servirà per affrontare gli esami.
Secondo noi questa idea di far presentare dei problemi di alto livello a ragazzi delle medie e delle superiori è un fatto molto positivo, poiché aiuta a comprendere meglio quello che abbiamo studiato e a prepararci al livello dell'università.
Attraverso questa esperienza abbiamo acquisito nuove conoscenze e imparato a ragionare in modo più astratto.
Non c'è che dire: "Grazie MATh.en.JEANS!"