Viaggio di diploma

Piero ha lavorato tutto il suo ultimo anno di studi e si è appena diplomato e come regalo ha ricevuto dei soldi. Ha a disposizione una bella somma e vuole fare il giro del mondo nel mese e mezzo di vacanze che ha prima di iscriversi all'università.

Centro Formativo Provinciale "G. Zanardelli" - Brescia (BS)
Classe: III A – EDQ
Insegnante di riferimento: prof.ssa Veronica Cavicchi
Ricercatore: dott. Francesco Atzeni
Partecipanti: Francesca Ghisalberti, Manuela Giusti, Denise Pontara

Il viaggio di Piero

Piero vuole visitare, partendo da Brescia, le seguenti città: Londra, New York, Mar del Plata (dove abita lo zio), Praga, Città del Capo, Mosca, Tokyo, Parigi, Roma, Madrid. Piero pensa inoltre di poterle visitare tutte una volta sola andando dall'una all'altra, iniziando da Brescia e finendo a Brescia. Non sempre le città sono collegate da un volo diretto, e quando sono collegate non sempre il collegamento costa poco.

In ogni caso Piero ha un piano di riserva per poter comunque fare il viaggio che sogna da tempo: andare da Brescia a Mar del Plata, dove abita lo zio, passando per tutte le città; una volta lì, Piero può lavorare nel bar dello zio per pagarsi il viaggio di ritorno.

Il ragazzo decide allora di preparare più itinerari per scegliere il meno caro. Per fare ciò raccoglie un po' di informazioni sui voli e li riassume in una tabella dove mette il costo del volo quando è presente, altrimenti lascia uno spazio bianco per indicare che tra le due

	Brescia	New York	Praga	Città del Capo	Mosca	Tokyo	Parigi	Mar del Plata	Roma	Madrid	Londra
Brescia	-								50		25
New York	Adatta le righe			300	500	400	200		800	750	270
Praga			-		350		50				30
Città del Capo		300		-		450	800	400			
Mosca		500	350		-	600			350		
Tokyo		400		450	600	-	750				
Parigi		200	50	800		750	-		100	60	35
Mar del Plata				400				-	550	300	
Roma	50	800			350		100	550	-	40	50
Madrid		750					60	300	40	-	60
Londra	25	270	30				35		50	60	-

città non c'è alcun volo.

Per ragionare meglio, Piero ha disegnato le rotte aeree tra le città con delle linee curve o dritte seguendo la tabella; in più ha messo vicino ad ogni rotta il prezzo del volo in modo da non confondersi. Si pongono allora due problemi:

- trovare l'itinerario che passa una volta sola per tutte le città, parte da Brescia e si conclude a Brescia (unica città visitata due volte) e che costa di meno. È unico o ce ne sono altri con lo stesso prezzo?
- Piero non è soddisfatto della rappresentazione delle rotte che ha fatto nel planisfero e nel mappamondo: le rotte si incrociano troppe volte e se la cartina è troppo piccola non si capisce niente. Piero ha pensato ad una rappresentazione come le cartine della metro di Milano, dove non importano le distanze, direzioni o dove sono disegnati i segnaposto delle fermate, ma sono importanti solo i collegamenti, cioè da dove si può andare in un altro posto e dove non si può andare. Riuscite a disegnare su un foglio di carta una tale mappa in modo che nessuna rotta si incroci se non in una città della lista?

L'idea di rappresentare le mete su una cartina si è rivelata molto complessa: un conto è raffigurare un percorso definitivo e corretto, un altro è procedere in un'analisi con una fitta ramificazione di intrecci.

Due spunti ci sono però venuti dall'analisi dei percorsi non ottimali provati nella ricerca della soluzione. La tabella ci mostra infatti una simmetria particolare tra le destinazioni; ad esempio, il costo tra Parigi e New York è esattamente lo stesso di quello tra New York e Parigi, e lo stesso vale per gli altri collegamenti. In particolare, la tabella è simmetrica rispetto alla sua diagonale principale. Data dunque la simmetria della tabella, l'itinerario da Brescia a Mar Plata trovato, se letto al contrario, avrebbe dovuto darci l'itinerario di ritorno.

Una nostra compagna ha poi avuto un'altra idea brillante: le uniche città collegate con Brescia sono Roma e Londra, per cui per tornare a Brescia alla fine del viaggio occorre che l'ultima città sia una di queste, mentre l'altra dovrebbe essere la prima meta del viaggio.

Ma come trovare il percorso che costa meno?

Il problema del commesso viaggiatore

Abbiamo trovato su un libro che il problema che stiamo studiando è equivalente al problema del commesso viaggiatore. Il nome nasce dalla sua più tipica rappresentazione: data una rete di città, connesse tramite delle strade, trovare il percorso di minore lunghezza che un commesso viaggiatore deve seguire per visitare tutte le città una e una sola volta.

Il problema è di considerevole importanza pratica, al di là delle ovvie applicazioni nella logistica e nei trasporti. Un esempio classico è la costruzione di circuiti stampati, nella pianificazione del percorso del trapano per creare i fori nella piastra.

Non esistono algoritmi efficienti per la risoluzione di questo problema, l'unico metodo di risoluzione è rappresentato dall'enumerazione totale, ovvero nell'elaborazione di tutti i possibili cammini sul grafo per la successiva scelta di quello migliore. Tuttavia, la complessità dell'operazione la rende impraticabile per grafi di dimensioni comuni nei problemi reali: in un grafo di n nodi, bisognerà calcolare, nel caso peggiore in cui ogni nodo è connesso con tutti gli altri, $n!$[1] possibili cammini, il che implica una complessità

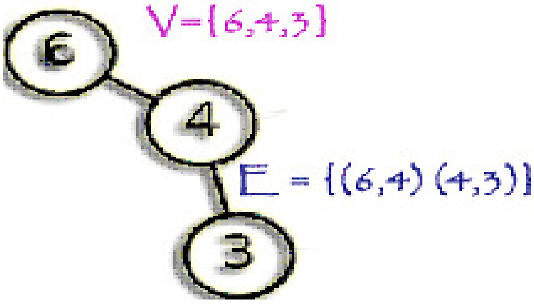
1 *n* fattoriale… è un numero molto grande! Sai quanto vale il fattoriale di 11, cioè il numero delle città del nostro problema? 11! = 39.916.800.

esponenziale. Una rete di mille nodi, molto più comune di quanto si possa pensare, comincerebbe già a creare seri problemi computazionali.

Quindi un problema simile al nostro esiste, e non è risolvibile attraverso una soluzione matematica generale, ma solo elencando eventualmente tutte le possibilità.

Si parlava prima di grafi e di nodi. Occorre quindi capire cosa indicano questi termini.

Definizione di grafo

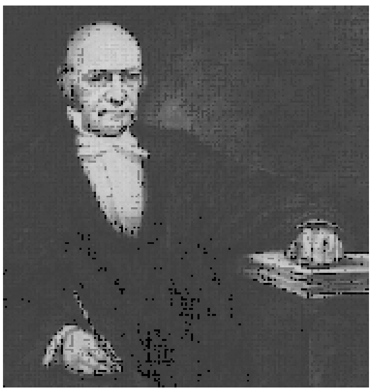


I grafi sono oggetti che permettono di schematizzare una grande varietà di situazioni e di processi e spesso di consentirne l'analisi in termini quantitativi. Un grafo è un insieme di elementi detti nodi o vertici collegati fra loro da archi o lati. Si dice grafo una coppia ordinata $G = (V, E)$ di insiemi, con V insieme dei nodi ed E insieme degli archi, tali che gli elementi di E siano coppie di elementi di V.

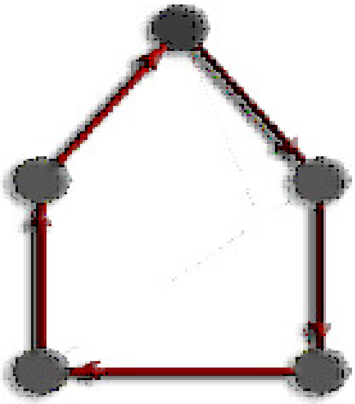
Un grafo viene generalmente raffigurato sul piano da punti o cerchietti, che rappresentano i nodi; archi o spigoli sono rappresentati da segmenti o curve che collegano due nodi. Il posizionamento dei nodi e la forma degli archi o spigoli è irrilevante, contano solo i nodi e le relazioni tra essi. Lo stesso grafo può essere disegnato in molti modi diversi senza modificarne le proprietà. Ci siamo anche chieste se ci fosse davvero una soluzione al problema e se c'erano dei problemi simili al nostro oltre a quello del commesso viaggiatore. Prese dallo sconforto, al solo pensiero di elencare tutte le possibilità per poi scoprire, magari, che non c'era una via d'uscita stavamo per cedere alla tentazione di risolvere un problema più facile, con meno destinazioni. Il ricercatore che ci ha seguito, Francesco, e la nostra prof.ssa di Matematica ci hanno chiesto secondo noi quale sarebbe stata una possibile modifica al problema da fare per renderlo più facile. Alla fine, però, abbiamo deciso di continuare a risolvere il nostro problema iniziale. Ci sarà pure una soluzione, no?

Cercando sempre nel libro e nella rete, abbiamo trovato qualche idea in più…

Ciclo di Hamilton



Nel campo matematico della teoria dei grafi, un cammino in un grafo (orientato o non orientato) è detto hamiltoniano se esso tocca tutti i vertici del grafo una e una sola volta. Si ha un ciclo hamiltoniano quando in un cammino hamiltoniano esiste un arco che collega l'ultimo vertice con il primo, realizzando così un ciclo che visita tutti i vertici per poi ritornare al punto di partenza.



Quindi il nostro problema è un ciclo hamiltoniano?! Ma chi era Hamilton? E come ha fatto a sapere se il suo problema aveva o meno una soluzione?

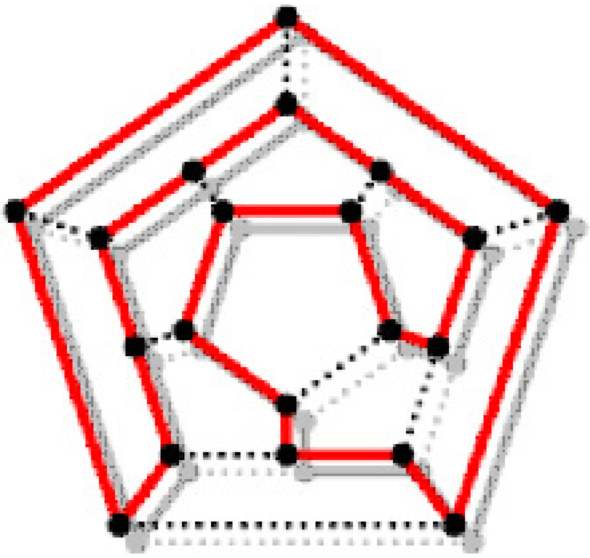
Sir William Rowan Hamilton (Dublino, 4 agosto 1805 – Dublino, 2 settembre 1865) è stato un matematico, fisico e astronomo irlandese, noto per i suoi contributi nello sviluppo dell'ottica, della meccanica e dell'algebra. Hamilton inventò anche il "calcolo icosiano", che usò per indagare percorsi chiusi su un dodecaedro passanti per ogni vertice solo una volta. Ed eccoci finalmente a un punto di svolta… la scoperta che una soluzione c'era!

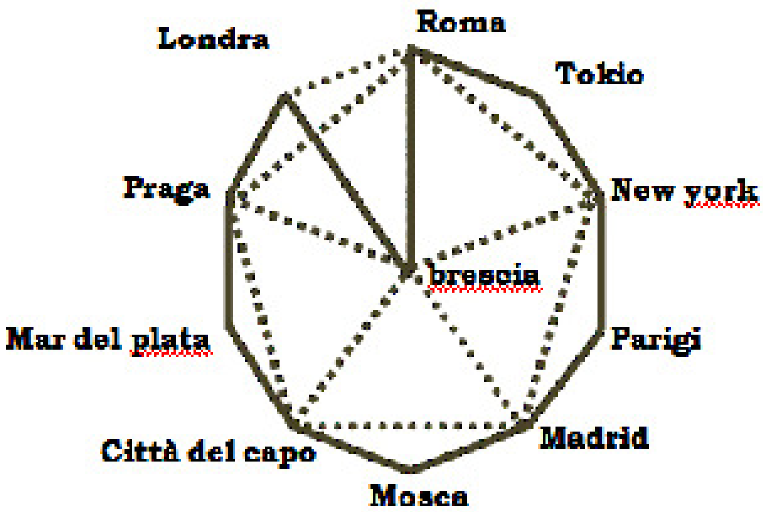
Icosian game

L'Icosian Game è un gioco matematico inventato nel 1857, appunto, da William Rowan Hamilton. L'obiettivo del gioco è di trovare un ciclo di Hamilton lungo i vertici di un dodecaedro, tale da attraversare ogni vertice solo una volta, nessun vertice può essere attraversato due volte e il punto finale del cammino deve coincidere con il punto iniziale. La motivazione che spinse Hamilton ad affrontare il problema è stata la ricerca di un procedura algebrica tale da permettere di calcolare le simmetrie di un dodecaedro.

La soluzione trovata è proprio un cammino ciclico che contiene 20 (dal greco icosia) lati, cioè un ciclo di Hamilton sull'icosaedro.

Francesca ha provato ad applicare l'icosian game al nostro problema, per vedere se nel nostro ciclo di Hamilton ci fosse o meno una soluzione. Ed ecco cosa abbiamo ottenuto:





Il ciclo di Hamilton, però non bastava e nemmeno l'icosian game. Non cercavamo solo di trovare se era possibile un percorso che ci permettesse, partendo da Brescia, di attraversare tutte le 10 città per poi tornare a Brescia. Volevamo il percorso che costasse di meno. Avevamo bisogno di vedere se c'erano altre applicazioni, altri problemi simili al nostro.

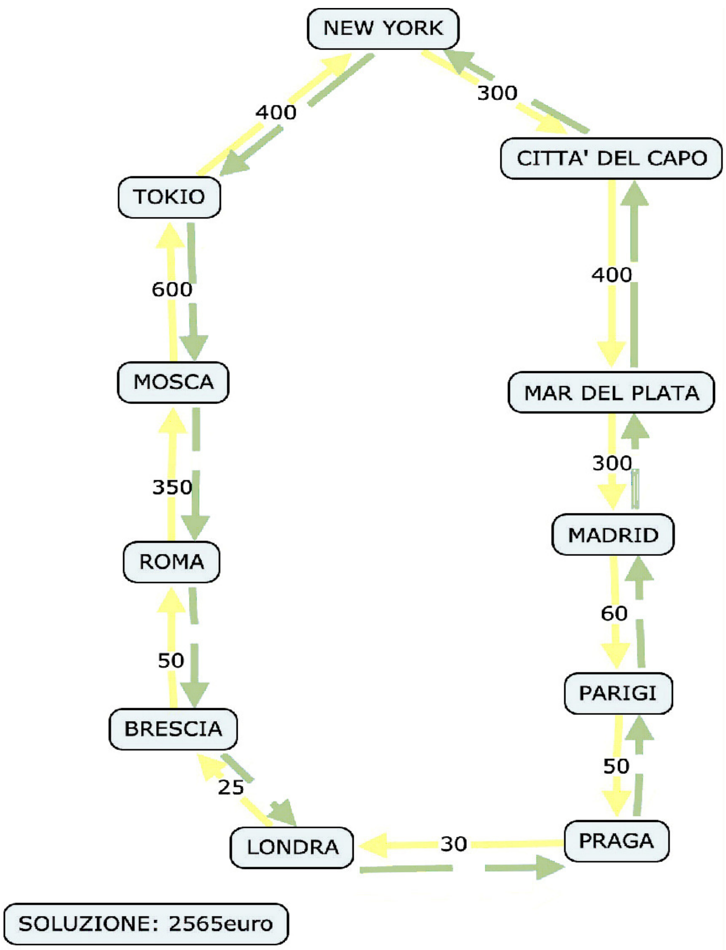
Il problema del cammino minimo

Fra i problemi più importanti, più semplici e più antichi, per la cui soluzione sono utilizzate rappresentazioni basate su grafi, vi sono i problemi di ricerca di cammini minimi, cioè di percorsi su grafi "pesati" per tempo di percorrenza o, come nel nostro caso, per "costo del viaggio". Si cerca il percorso che minimizza, cioè rende più piccolo possibile il peso complessivo del collegamento tra i nodi. Questo aspetto inizialmente ci aveva ingannate. Alcune di noi pensavano che per trovare il percorso migliore, dal costo minimo, bastasse considerare di volta in volta gli itinerari con i prezzi "più bassi" possibile nel limite di un collegamento accettabile. Abbiamo invece notato che la situazione era molto più complessa e non si poteva risolvere scegliendo così le destinazioni. Il problema assomiglia alla ricerca di un grafo pesato che rappresenta una rete stradale, in cui i pesi

degli archi indicano il valore atteso del tempo di percorrenza dell'arco, il problema è quello di trovare il cammino che congiunge due particolari nodi del grafo (nodo di partenza e nodo di arrivo) con tempo di percorrenza minimo. Possono esistere più cammini con la caratteristica di essere minimi. Un problema simile è quello di gestire un progetto di grandi dimensioni, costituito da più attività, che devono essere tutte completate affinché il progetto di cui fanno parte sia completato, ma che possono essere iniziate e svolte indipendentemente l'una dall'altra, purché sia rispettata una data sequenza.
Il nostro è proprio un ciclo hamiltoniano, pesato come un problema di cammino minimo.

Possibile soluzione

Abbiamo capito di cosa ci stiamo occupando, abbiamo imparato molti concetti nuovi, abbiamo scoperto che il nostro problema ha almeno una soluzione, ma che non c'è un procedimento generale che ci permette di risolverlo. Denise a questo punto ha avuto una brillante idea, elencare tutti i possibili percorsi e calcolare i costi di tutti quelli che rappresentavano un ciclo hamiltoniano che partendo da Brescia e tornando a Brescia toccasse tutte le città. Manuela, Denise e Francesca si sono messe al lavoro ed hanno elencato in una mappa creata con cmaptools tutti i rami dei possibili percorsi che partendo da Brescia e passando per Roma tornassero a Brescia (tanto la mappa che aveva come seconda destinazione Londra sarebbe stata uguale a quella trovata, ma con le città in ordine inverso!). Spesso Denise è stata presa dalla stanchezza, soprattutto quando si trovava di fronte a cammini senza possibili ulteriori sviluppi, cioè cammini "ciechi"… ma alla fine ha resistito ed ha trovato la soluzione!
Rappresentare qui tutta la mappa è forse troppo complesso, è un grafo ad albero molto grande, ma la soluzione, ottenuta dal confronto tra tutti i pesi complessivi di ogni ciclo hamiltoniano è la seguente:



È stato un percorso molto duro. Abbiamo iniziato tutte insieme, ma poi in diverse si sono arrese… chi ha resistito ha potuto finalmente vedere che anche i problemi che sembrano impossibili hanno una soluzione e che fare ricerca è un'avventura straordinaria.