Matematica dei nodi di cravatta
un approccio elementare

di Andrea Centomo & Giovanni Paolini

20 giugno 2009

Riassunto

In questo articolo si propone una trattazione matematica elementare del problema della classificazione dei nodi di cravatta. Il problema è stato affrontato in modo completo ed esaustivo ricorrendo alla teoria dei percorsi casuali markoviani in [3].

Prof. **Andrea Centomo**
Liceo "F. Corradini" di Thiene (VI)
Nodo Grandchester

Giovanni Paolini
Liceo "N. Copernico" di Brescia
Nodo Pratt

Introduzione

Lo studio della matematica dei nodi di cravatta è stato affrontato in modo rigoroso e completo dieci anni fa da T. Fink e Y. Mao in [3]. L'idea alla base del lavoro consiste nel pensare un nodo di cravatta come un percorso casuale di Markov persistente su un reticolo triangolare. Da questa formalizzazione è possibile analizzare la struttura topologica dei nodi e ottenere la loro classificazione in base a dimensione e forma. Nel lavoro di Fink e Mao vengono anche stabiliti i parametri di simmetria e bilanciamento che permettono di selezionare nell'insieme dei nodi possibili quelli che possono definirsi esteticamente soddisfacenti. I contenuti matematici di [3] si trovano riassunti, in modo piuttosto succinto, nell'Appendice di [1] mentre una trattazione divulgativa dell'intero argomento si trova condensata in [2].

Nel nostro lavoro non siamo riusciti a resistere alla tentazione di rivisitare alcuni dei contenuti matematici di [3] ricorrendo a nozioni elementari riguardanti il calcolo combinatorio e le progressioni geometriche. In effetti utilizzando questi strumenti si riescono a stabilire senza troppe difficoltà il numero di nodi possibili e la cardinalità di ciascuna delle classi in cui essi vengono ripartiti. Per completezza, nell'ultimo paragrafo del lavoro, sono stati riportati i parametri introdotti da Fink e Mao per classificare un nodo come *estetico*. La speranza è di fornire una trattazione matematica semplice e completa del tema utile per studenti e docenti della scuola secondaria.

1 Annodare la cravatta

Una volta che la cravatta è sistemata attorno al collo l'estremità larga (attiva) è avvolta a quella stretta (passiva) in modo che quest'ultima sia libera di scorrere intorno al nodo che ne deriva.

Prima di eseguire un qualsiasi nodo la cravatta si trova in uno di due stati possibili: nel primo stato F (fronte) la parte non decorata della cravatta è a contatto con la camicia, mentre nel secondo stato R (retro) è la parte decorata ad essere a contatto della camicia.

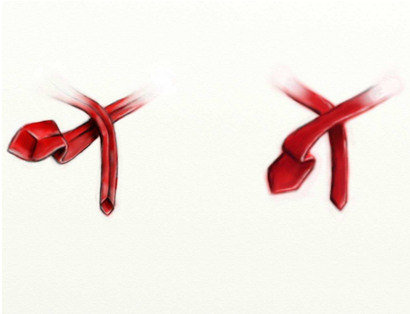

Figura 1. Stati iniziali: R e F.

Il nodo di cravatta viene eseguito di fronte ad uno specchio utilizzando sei possibili movimenti che vengono rappresentati nella notazione di Fink e Mao [1] con i simboli

$$S_\otimes \quad S_\odot \quad D_\otimes \quad D_\odot \quad C_\otimes \quad C_\odot$$

dove

- S indica un movimento che allo specchio appare verso sinistra
- D indica un movimento che allo specchio appare verso destra
- C indica un movimento che allo specchio appare centrale

Con il simbolo $\otimes$ si indica un movimento verso "l'interno" della camicia mentre con $\odot$ si indica un movimento verso "l'esterno" della camicia. Per completare il nodo l'estremità attiva deve essere avvolta sopra la parte anteriore, ossia si devono eseguire i movimenti $D_\odot S_\otimes$ oppure $S_\odot D_\otimes$, quindi si procede verso il centro all'interno della camicia con un movimento $C_\odot$ e alla fine si passa attraverso il nodo scorsoio frontale preparato dai movimenti precedenti (quest'ultima sequenza di chiusura non è considerata un passaggio e verrà indicata nel seguito con il simbolo A).

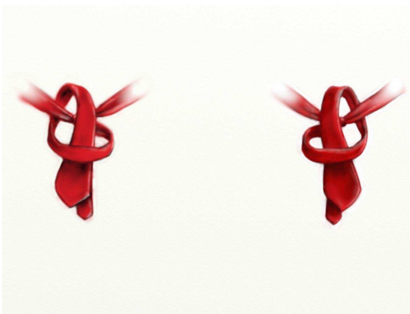

Figura 2. Movimenti di chiusura

Esempio 1. Il nodo mezzo Windsor è descritto dalla sequenza $S_\otimes D_\odot C_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$ e la sua realizzazione[1] è un esercizio molto utile in quanto contiene tutti i sei movimenti fondamentali visti sopra.

1. Esistono in YouTube molti video che mostrano come si realizza un nodo mezzo Windsor. In molti di essi il nodo mezzo Windsor viene presentato nella sua variante self-releasing $S_\otimes D_\odot C_\otimes D_\odot S_\otimes C_\odot A$.

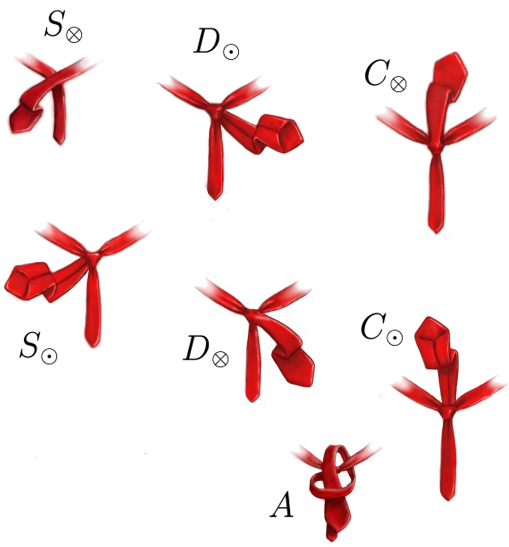

Figura 3. Sequenza di realizzazione per il nodo mezzo Windsor

In generale, quando si esegue un nodo, devono essere rispettati i seguenti *vincoli*:

I. si inizia sempre con un movimento a sinistra[2]: $S_\odot$ (per i nodi a numero dispari di passaggi) o con $S_\otimes$ (per i nodi a numero pari di passaggi)

II. non si può eseguire due volte consecutive uno stesso movimento

III. ogni nodo si conclude con una sequenza predefinita di passaggi $D_\otimes C_\odot A$ o $S_\otimes C_\odot A$.

2 Matematica dei nodi di cravatta

La notazione di Fink e Mao è molto utile come riferimento per l'esecuzione pratica dei nodi di cravatta. Tuttavia nella trattazione matematica che segue un nodo sarà descritto in modo più semplice utilizzando *stringhe di caratteri* che contengono solo le lettere S, D e C:

a) i simboli $\otimes$ e $\odot$ vengono omessi in quanto sono univocamente determinati dal fatto che seguono una legge alternante e che nei nodi con numero dispari di passaggi si inizia sempre con $\odot$ mentre in quelli con numero pari di passaggi si inizia sempre con $\otimes$.

   Osserviamo di passaggio che nei nodi che iniziano con $\otimes$ la cravatta viene disposta inizialmente mostrando la parte anteriore (come in Figura 1) mentre negli altri casi viene disposta mostrando la parte posteriore;

b) un nodo che si esegue in d passaggi è descritto da una stringa di $n = d - 2$ caratteri. Gli ultimi due passaggi, che portano alla chiusura del nodo (A), sono infatti sempre rappresentati da $D_\otimes C_\odot$ o $S_\otimes C_\odot$ e sono univocamente determinati dal movimento eseguito al terzultimo passaggio.

Ad esempio, il nodo mezzo Windsor $S_\otimes D_\odot C_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$, è descritto matematicamente dalla stringa $SDCS$ in quanto il movimento S impone che la sua conclusione sia DCA e trattandosi di un nodo con numero pari di passaggi (i passaggi sono 6) "interno" e "esterno" della camicia si alternano a partire da $\otimes$.

I vincoli I, II e III esposti in precedenza si possono riformulare per le stringhe come segue

a) ogni stringa inizia con S

2. I mancini o coloro che non utilizzano lo specchio per eseguire un nodo possono utilizzare tutti i risultati della trattazione scambiando il movimento S con D.

b) due lettere consecutive di una stringa non possono essere uguali

c) ogni stringa si conclude con S o D

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{S}_n$ l'insieme delle stringhe di $n \geq 1$ caratteri che soddisfano i vincoli precedenti.

2.1 Contiamo i nodi

Il primo problema che affrontiamo consiste nel calcolo della cardinalità di $\mathcal{S}_n$ e può essere enunciato semplicemente come segue:

Problema 1. *Quante stringhe T_n contiene $\mathcal{S}_n$?*

Soluzione. Per risolvere il problema indichiamo con $T_n(D)$, $T_n(S)$ e $T_n(C)$ il numero totale di stringhe di $\mathcal{S}_n$ che terminano rispettivamente con D, S e C. Tenuto conto dei vincoli con cui le stringhe vengono costruite si ha che

$$T_n(D) + T_n(S) + T_n(C) = 2^{n-1} \tag{1}$$

inoltre valgono le relazioni

$$\begin{cases} T_{n-1}(D) + T_{n-1}(S) = T_n(C) \\ T_{n-1}(C) + T_{n-1}(D) = T_n(S) \\ T_{n-1}(S) + T_{n-1}(C) = T_n(D) \end{cases} \tag{2}$$

che ci informano del fatto che il numero di stringhe di n caratteri che terminano con un dato movimento sono pari alla somma del numero di stringhe di $n-1$ caratteri che terminano con i due rimanenti movimenti. Utilizzando (2) si ha

$$T_{n+2}(S) = T_{n+1}(D) + T_{n+1}(C) = T_n(D) + T_n(C) + 2T_n(S)$$

da cui ricordando la (1) anche

$$T_{n+2}(S) = T_n(S) + 2^{n-1} \tag{3}$$

con $T_1(S) = 1$ e $T_2(S) = 0$. In modo del tutto analogo si verifica che

$$T_{n+2}(D) = T_n(D) + 2^{n-1} \tag{4}$$

con $T_1(D) = 0$ e $T_2(D) = 1$. Ora da (3) e (4) si ha

$$T_{n+2}(S) + T_{n+2}(D) = T_n(S) + T_n(D) + 2^n$$

da cui la relazione ricorsiva

$$T_{n+2} = T_n + 2^n \tag{5}$$

con $T_1 = T_2 = 1$. Per renderci conto dell'andamento del numero totale di stringhe al variare di n osserviamo che

$$T_3 = 1 + 2 \qquad T_4 = 1 + 2^2 \qquad T_5 = 1 + 2 + 2^3 \qquad T_6 = 1 + 2^2 + 2^4 \ldots$$

Se n è pari ossia se $n = 2p$, utilizzando la formula della somma di un numero finito di termini iniziali della progressione geometrica, si ha

$$T_{2p} = \sum_{j=0}^{p-1} 2^{2j} = \frac{2^{2p} - 1}{3}$$

mentre se n è dispari, ossia se $n = 2p + 1$, in modo analogo si ha

$$T_{2p+1} = 1 + \sum_{j=0}^{p-1} 2^{2j+1} = 1 + 2\left(\frac{2^{2p} - 1}{3}\right) = \frac{2^{2p+1} + 1}{3}.$$

In conclusione la soluzione del Problema 1 è la seguente

$$T_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}. \tag{6}$$

Per ragioni di natura fisica (la cravatta ha una lunghezza limitata) e per ragioni estetiche (conviene evitare nodi troppo spessi e quindi con troppi passaggi) per i nodi di cravatta che si utilizzano concretamente vale la limitazione

$$1 \leq n \leq 7. \tag{7}$$

Avendo risolto il Problema 1, possiamo calcolare immediatamente il numero totale T di nodi di cravatta possibili attraverso la somma

$$T = \sum_{n=1}^{7} T_n = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{7} 2^n + 1 = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{7} 2^n = \frac{2^8 - 1}{3} = 85.$$

2.2 La forma di un nodo

La simmetria del nodo di cravatta impone che il numero di passaggi a destra e a sinistra siano uguali o in numero non troppo diverso tra loro. Fissata la dimensione d di un nodo, è sensato stabilire che la sua *forma* sia descritta dal numero γ di movimenti di centro C che lo caratterizzano. Nella nostra rappresentazione matematica indicheremo il numero che individua la forma con k e, osservato che la sequenza di chiusura del nodo contiene sempre un unico movimento C, si ha la relazione

$$k = \gamma - 1.$$

Prima di affrontare il problema fondamentale del calcolo di tutte le possibili forme di un nodo di dimensione d vediamo di stabilire il numero di centri ammissibili per nodi di una prefissata dimensione.

Problema 2. *Quali sono i valori possibili di k per le stringhe di $\mathcal{S}_n$?*

Soluzione. Iniziamo risolvendo questo problema nel caso particolare in cui n sia pari. Osserviamo che:

a) $k \geq 0$ dove l'uguaglianza a zero si ha nel caso particolare (unico) della stringa in cui si alternano solo movimenti D e S;

b) $k \leq \frac{n}{2} - 1$ Il valore massimo si calcola osservando che, per i vincoli posti, una stringa inizia e termina con movimenti *diversi* da C. Se la stringa ha n elementi, tolti il primo e l'ultimo, ne restano $n - 2$. Di questi $n - 2$, per rispettare i vincoli, al più la metà possono essere di tipo C.

In conclusione, nel caso pari, si ha

$$0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$$

Il caso dispari si tratta in modo simile e avremo

$$0 \leq k \leq \frac{n+1}{2}.$$

Finalmente possiamo affrontare il seguente.

Problema 3. *Quanti elementi $F_n(k)$ di $\mathcal{S}_n$ hanno forma k?*

Soluzione. Iniziamo considerando una qualsiasi stringa di $n - k - 1$ caratteri e andiamo a sistemare in essa k lettere C. Come noto il numero di modi m in cui è possibile fare questo si esprime attraverso il coefficiente binomiale

$$m = \binom{n-k-1}{k}.$$

Una parte delle m stringhe parzialmente vuote contravviene al vincolo b) ossia in esse le lettere C compaiono anche consecutivamente. Come vedremo tra poco questo non è un problema. Prendiamo infatti un stringa s delle precedenti e aggiungiamo al suo inizio e dopo ogni C uno spazio vuoto. Riempiamo il primo spazio vuoto con S, per soddisfare il vincolo a), e alterniamo lettere D o S fino ad incontrare la prima lettera C. Nel primo spazio vuoto dopo la prima lettera C possiamo scegliere di inserire una lettera D o S fissata la quale rimane fissata univocamente la successione alternata di lettere S e D da inserire negli spazi vuoti fino ad incontrare la seconda lettera C. Procedendo in questo modo si ottiene una stringa di $\mathcal{S}_n$ avente forma k. Ora, osservato che il completamento di una stringa dipende solo dalle k scelte S o D negli spazi vuoti a valle di ciascuna lettera C, è chiaro che il numero di stringhe che si possono generare riempiendo s è 2^k. In conclusione allora

$$F_n(k) = 2^k \cdot \binom{n-k-1}{k} \tag{8}$$

Una *classe* di nodi sarà individuata dalla coppia ordinata $\{d, \gamma\}$ (dimensione e forma) e, tenuto conto della limitazione (7), i nodi di cravatta che si realizzano concretamente rientrano in 16 classi possibili evidenziate in Tabella 1.

$d = n+2$	$\gamma = k+1$	classe	$F_n(k)$	T_n
3	**1**	$\{3,1\}$	1	1
4	**1**	$\{4,1\}$	1	1
5	**1**	$\{5,1\}$	1	3
	2	$\{5,2\}$	2	
6	**1**	$\{6,1\}$	1	5
	2	$\{6,2\}$	4	
7	1	$\{7,1\}$	1	11
	2	$\{7,2\}$	6	
	3	$\{7,3\}$	4	
8	1	$\{8,1\}$	1	21
	2	$\{8,2\}$	8	
	3	$\{8,3\}$	12	
9	1	$\{9,1\}$	1	43
	2	$\{9,2\}$	10	
	3	$\{9,3\}$	24	
	4	$\{9,4\}$	8	

Tabella 1. Classificazione delle classi di nodi

3 Parametri estetici

Un primo parametro estetico che consideremo è rappresentato dal rapporto forma-dimensione

$$r = \frac{\gamma}{d}$$

tra forma e dimensione del nodo. Nodi di dimensione elevata con pochi centri o viceversa nodi di bassa dimensione con molti centri difficilmente avranno una buona resa estetica. Per questa ragione, seguendo [1], è conveniente imporre ad un nodo *estetico* la limitazione

$$\frac{1}{6} \leq r \leq \frac{1}{2} \tag{9}$$

e in questo modo da 16 classi di nodi ci si riduce alle 13 il cui numero di movimenti di centro γ è evidenziato in grassetto in Tabella 1.

Un secondo parametro estetico che caratterizza un nodo è il *grado di simmetria* s definito come il valore assoluto della differenza tra il numero di passaggi a destra e a sinistra:

$$s = |n_d - n_s|.$$

Un nodo *estetico* di una classe deve soddisfare la condizione

$$s \leq 1. \tag{10}$$

Ad esempio, per il nodo mezzo Windsor $S_\otimes D_\odot C_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$ è facile vedere che $s = 0$.

Figura 4. La perfetta simmetria di un mezzo-Windsor

Il terzo parametro estetico è l'*equilibrio* che esprime il grado in cui i movimenti che definiscono un nodo risultano ben mescolati. Un nodo ben equilibrato ha il pregio di essere annodato strettamente e di mantenere la forma. Assunto che:

a) alle transizioni antiorarie (nel riferimento della camicia) $C \to D$, $D \to S$ e $S \to C$ sia assegnato il valore $+1$

b) alle transizioni antiorarie nello stesso riferimento $D \to C$, $S \to D$ e $C \to S$ sia assegnato il valore -1

si definisce *equilibrio* di un nodo la quantità

$$e = \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{h-1} |\omega_i - \omega_{i-1}|$$

dove ω_i è il valore assegnato alla transizione dal $i-$esimo movimento al successivo. Vediamo un esempio in cui si mostra come e possa essere calcolato. Consideriamo come al solito il nodo mezzo Windsor $S_\otimes D_\odot C_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$ con i passaggi di Figura 1. Le transizioni che intervengono nella realizzazione del nodo sono

$$S_\otimes \to D_\odot \to C_\otimes \to S_\odot \to D_\otimes \to C_\odot$$

$$e = \frac{1}{2} (|\omega_2 - \omega_1| + |\omega_3 - \omega_2| + |\omega_4 - \omega_3| + |\omega_5 - \omega_4|) = 0$$

in quanto sono tutte transizioni antiorarie. Il nodo maggiormente *estetico* di una classe avrà il valore minimo di e in quella classe.

In conclusione le caratteristiche che un nodo deve soddisfare per essere estetico possono essere riassunte come segue:

A) aver un buon rapporto forma-dimensione (9)

B) essere simmetrico (10)

C) essere equilibrato (minimizzare e).

	d	γ	sequenza	r	s	e	**nome**
R	3	1	$S_\odot D_\otimes C_\odot A$	1/3	0	0	**Orientale**
F	4	1	$S_\otimes D_\odot S_\otimes C_\odot A$	1/4	1	1	Tiro a quattro
R	5	1	$S_\odot D_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$	1/5	0	2	Kelvin
R	5	2	$S_\odot C_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$	2/5	1	1	Pratt
F	6	1	$S_\otimes D_\odot S_\otimes D_\odot S_\otimes C_\odot A$	1/6	1	3	Victoria
F	6	2	$S_\otimes D_\odot C_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$	1/3	0	0	**Mezzo Windsor**
R	7	2	$S_\odot D_\otimes S_\otimes C_\otimes D_\odot S_\otimes C_\odot A$	2/7	1	1	*St. Andrew*
R	7	3	$S_\odot C_\otimes D_\odot C_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$	3/7	0	1	Plattsburgh
F	8	2	$S_\otimes D_\odot S_\otimes C_\odot D_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$	1/4	0	2	Cavendish
F	8	3	$S_\otimes C_\odot D_\otimes S_\odot C_\otimes D_\odot S_\otimes C_\odot A$	3/8	0	0	**Windsor**
R	9	2	$S_\odot D_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot S_\otimes D_\odot S_\otimes C_\odot A$	2/9	1	3	Grantchester
R	9	3	$S_\odot D_\otimes C_\odot S_\otimes D_\odot C_\otimes S_\odot D_\otimes C_\odot A$	1/3	0	0	**Hanover**
R	9	4	$S_\odot C_\otimes D_\odot C_\otimes S_\odot C_\otimes D_\odot S_\otimes C_\odot A$	4/9	1	2	Balthus

Tabella 2. Nodi estetici di ciascuna classe

Nella Tabella 2 sono evidenziati in grassetto i nodi più estetici.

Bibliografia

[1] T. Fink Y. Mao, *85 modi di annodare la cravatta*, Edizioni Bompiani, Milano, 2007.

[2] T. Fink Y. Mao, Designing tie knots by random walks, Nature **398**, 1999.

[3] T. Fink Y. Mao, Tie knots, random walks and topology, Physica A 276: 109-121, 2000.

Sitografia

[1] Encyclopedia of Tie Knots `http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~tmf20/tieknots.shtml`