

# fuoribordo

# Matematica nel calcio

di ANA CRISTINA OLIVEIRA

Dall'anno della sua fondazione, nel 1999, l'Associazione Atractor, che si occupa di divulgazione della matematica, ha sviluppato diverse attività a carattere scientifico e pedagogico. Questo articolo descrive un exhibit interattivo che illustra – attraverso il gioco del calcio – alcune proprietà geometriche della circonferenza

Una circonferenza è il luogo dei punti del piano che si trovano a una distanza assegnata da un punto fissato. Questa curva si caratterizza anche per altre proprietà di diversa natura che possono fungere allo stesso modo da definizione. Ad esempio, tra tutte le curve del piano, semplici (senza autointersezioni) e chiuse (se percorriamo la curva sempre nello stesso senso, ritorniamo al punto di partenza), è quella che ingloba l'area maggiore a parità di perimetro.

L'exhibit che descriviamo in queste pagine è stato proposto, nel 2005, ai giovani partecipanti, di 10/11 anni, a *Universidade Júnior*, un'iniziativa dell'Università di Porto.

Si intitola *Matematica nel calcio* e si serve del gioco del calcio per illustrare altre proprietà che solo la circonferenza verifica:

(a) qualsiasi angolo<sup>1</sup> inscritto in una circonferenza, di centro  $O$  e raggio 1, ha ampiezza pari a metà dell'arco da esso sotteso (Fig. 1); da ciò risulta, in particolare, che in una circonferenza sono uguali angoli inscritti che sottendono la stessa corda (Fig. 2);

(b) fissato un angolo  $AMB$  di ampiezza  $\alpha$ , il luogo geometrico dei punti  $P$  – nel semipiano che contiene  $M$  e che è limitato dalla retta  $AB$  – tali che l'angolo  $APB$  abbia ampiezza  $\alpha$ , è l'arco di circonferenza di estremi  $A$  e  $B$  che

passa per  $M$ . Se un punto  $Q$  è interno alla curva formata dall'unione di questo arco con il segmento  $AB$ , l'ampiezza di  $APB$  è maggiore di  $\alpha$ , mentre, se  $Q$  è ancora nel semipiano di cui stiamo parlando ma è esterno alla stessa curva, l'ampiezza dell'angolo è minore di  $\alpha$  (Fig. 3).

Le due immagini delle figure 4 e 5 mostrano come questa affermazione sia una facile conseguenza del fatto che, in un triangolo qualsiasi, ogni angolo esterno è la somma dei due angoli interni che non gli sono adiacenti.

Ma che cosa ha a che fare tutto ciò con il calcio? In questo sport, la determinazione del luogo ideale per segnare un gol fa parte della strategia.

E, anche ignorando i giocatori della squadra avversaria, non è affatto sicuro che un giocatore segni un gol da un punto qualsiasi del campo. È vero che un giocatore che si trova a un metro dal centro della porta, e senza avversari, dovrebbe proprio riuscire a segnare, ma da quali altri punti si ha una simile certezza?

La risposta dipende dalla mira del giocatore, evidentemente. In *Matematica nel calcio*, l'efficacia della mira di ogni giocatore è rappresentata da un cuneo

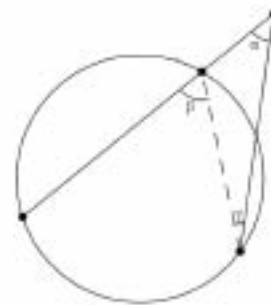


Fig. 4  $\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \alpha < \beta$

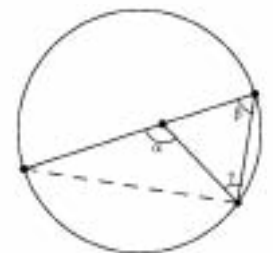


Fig. 5  $\alpha = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha > \beta$

di plastica (quello bianco in figura 7) la cui apertura è pari al doppio dell'angolo massimo di errore del dato giocatore: migliore è il giocatore, più stretto è il cuneo.



Fig. 6

Per risolvere il problema di determinare la regione in cui il giocatore (senza avversari) è certo di segnare un gol, si colloca il cuneo come indicato nella figura 7 (cioè in modo che lo specchio della porta contenga il cuneo) e si segnano su di un foglio di carta trasparente precedentemente fissato sul campo i vertici del cuneo per cui ciò accade.

In realtà, per individuare la regione desiderata, basta segnare i vertici corrispondenti alle posizioni del cuneo per

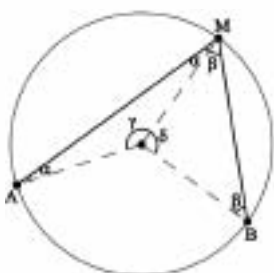


Fig. 1  $\gamma + \delta = 2\pi - 2(\alpha + \beta)$

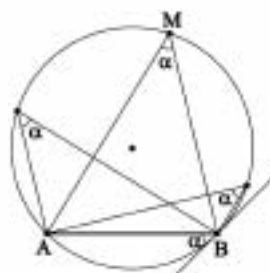


Fig. 2

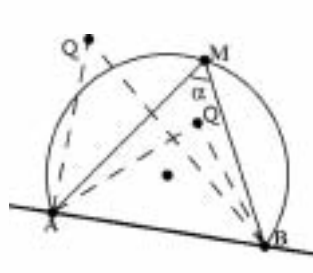


Fig. 3



Fig. 7

le quali i due lati del cuneo passano per i pali della porta. Questi punti individuano una *curva* che è il bordo della regione cercata, cioè della regione in cui il giocatore di abilità corrispondente a quel cuneo e che miri correttamente è certo di fare gol. Questa *curva* (Fig. 8) ha una forma che “ricorda” quella di un arco di circonferenza. E, in effetti, per la proprietà (b) descritta sopra sappiamo che è un arco di circonferenza.

Consideriamo ora un problema concreto: un giocatore corre lungo una linea parallela alla linea laterale del campo. Esiste un punto, su questa linea, dal



Fig. 8

quale, senza l'intervento di avversari, egli ha la certezza di segnare un gol? La risposta dipende, ancora, dall'efficacia del tiro in porta del giocatore – ossia, dalla larghezza del cuneo che gli è associato – e, naturalmente, anche dalla retta. Se consideriamo l'arco che passa per gli estremi della porta e che ha un angolo inscritto, sotteso dalla corda determinata da questi estremi, di ampiezza uguale a quella del cuneo di questo giocatore, allora:

- (1) o non vi è alcun punto in cui il gol sia certo (Fig. 9);
- (2) o il gol è garantito<sup>2</sup> se il calcio è tirato da un punto del segmento  $CD$  della retta (Fig. 10);
- (3) oppure la retta è tangente all'arco, e il punto di tangenza è l'unico in cui è assicurata<sup>3</sup> la marcatura (Fig. 11).

Il giocatore, trovandosi nel punto giusto per tirare in porta, dove deve mirare con la palla se vuole segnare un gol? Dovrà puntare al centro della porta? Gli utenti del modulo sono nuova-

**Ana Cristina Oliveira** (amolivei@fc.up.pt)

Laureata in Matematica, collabora con l'associazione portoghese *Atractor - Matemática Interactiva* dal 1999. Una versione virtuale dell'esperimento (in portoghese) è disponibile all'indirizzo url <http://www.atorator.pt/ujr/materiais-2005/Futebol.gsp>



**Atractor - Matemática Interactiva**

*Atractor* (<http://www.atorator.pt/>) è un'associazione portoghese senza fini di lucro che si occupa di divulgazione della matematica. Tra le molte attività e iniziative che questa associazione ha realizzato, vi sono la mostra *Matemática Viva*, che è ospitata fin dal 2000 nel *Padiglione della Conoscenza* di Lisbona, la versione portoghese (e ampliata) della mostra *Simmetria, giochi di specchi* e l'ideazione del DVD *Simmetria - una presentazione dinamica*, che è già stato distribuito in 16000 copie (di cui 10000 in Italia).

mente invitati a testare sperimentalmente vari cunei (ovvero vari giocatori) per verificare che, in alcune circostanze (come quelle descritte nella figura 12), per un giocatore posto in  $P$ , è possibile fallire il gol tirando la palla verso il punto medio  $M$  di  $AB$ . Con un po' più di sforzo, ci si convince che, se il giocatore puntasse verso il punto  $Q$  di intersezione della bisettrice dell'angolo  $APB$  e del segmento  $AB$ , allora, senza l'intervento della difesa o del portiere, il gol sarebbe garantito. Da ciò deduciamo che un giocatore deve mirare con la palla verso il centro della porta quando  $Q$  coincide con  $M$ , cioè, quando il triangolo  $APB$  è isoscele, con  $|PA|=|PB|$ .

Supponiamo ora che il giocatore non sia in un punto favorevole al tiro in porta. Dovrà allora avvicinarsi alla regione in cui è garantito il gol, oppure passare la palla a un altro giocatore posto in una posizione migliore. Per la seconda opzione, occorre assicurarsi che la palla entri nella regione di tiro adeguata al compagno di squadra – l'arco di circonferenza che passa per gli estremi della porta e che ha un angolo inscritto sotteso nella porta con ampiezza uguale a quella del cuneo di questo giocatore (Fig. 13, dove  $X$  rappresenta il giocatore con la palla).

Considerando le rette tangenti a tale arco che passano per  $X$ , concludiamo che il giocatore dovrà mirare al punto medio del segmento  $CD$ , se  $C$  e  $D$  sono i punti di tangenza. In questo modo, occorre puntare nella direzione della bisettrice dell'angolo  $CXD$ , una volta che

la corda  $CD$  intersechi la curva in angoli uguali (Fig. 14).

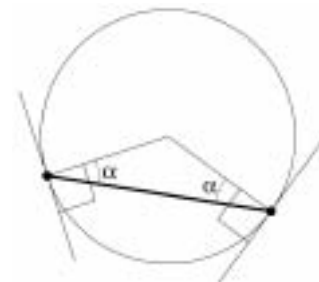


Fig. 14

Infatti, questa è un'altra proprietà che caratterizza la circonferenza: tra tutte le curve piane, semplici e chiuse, essa è l'unica che viene intersecata secondo angoli uguali da qualsiasi corda. La figura 15 evidenzia il fatto che tale risultato è un'immediata conseguenza della proprietà che angoli iscritti in una circonferenza e che sottendono la stessa corda sono uguali, proprietà che solo la circonferenza verifica.

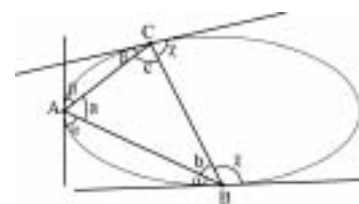


Fig. 15

**Note**

1. Qui usiamo i termini “angolo” e “corda” nel senso di “angolo orientato” e “corda orientata”.
2. È possibile che la palla tocchi i pali, ma, per semplicità, consideriamo questo caso come gol.
3. Come sopra.



Fig. 9



Fig. 10



Fig. 11



Fig. 12



Fig. 13