

Il piano e i suoi punti

Scuola secondaria di I grado Galileo Galilei - Busto Arsizio (VA)

Classi: 3°B, 3°C, 3°D e 3°E

Docenti di riferimento: Maria Ausilia Sora e Alessandra Zanzottera

Ricercatore: Elena Ballante

Ragazzi partecipanti: Roberto Barlocco, Jacopo Caruso, Alessia Chiarelli, Luca Colombo, Anthony D'Angeli, Alessia Maino, Gianluca Mercuri, Elena Moretto, Elena Parise, Sara Pozzi, Luca Toffano, Gabriele Colaci, Matteo Giannico, Riccardo Molteni, Veronica Nardi, Alessia Riello, Cristiano Riganti, Cristina Romayna Viera Dennis, Laura Arzano, Paola Livello, Alessia Napolitano, Giorgia Ventre, Gaia Pacino

Ogni punto del piano viene colorato in bianco o in nero. Allora, indipendentemente dalla colorazione scelta, si verificano questi tre fatti:

- 1. esistono due punti dello stesso colore la cui distanza sia minore di 2;*
- 2. esiste un segmento di lunghezza 2 i cui vertici abbiano lo stesso colore;*
- 3. esiste un triangolo rettangolo con l'ipotenusa di lunghezza 2 e un angolo acuto di 60° tale che i suoi vertici siano dello stesso colore.*

Siamo partiti analizzando le parole chiave del testo.

Il punto

Che cos'è un punto? Molti a questa domanda rispondono esprimendo ciò che pensano al primo impatto, anche attraverso esempi fuori dalla logica. Per esempio alcuni rispondono dicendo che "è un pallino microscopico" o "un segno ortografico" oppure "prendi la matita e fai tic". Insomma tra le molte definizioni, di geometriche non c'è neanche l'ombra.

In verità il punto è il primo ente fondamentale della geometria; esso è un concetto primitivo, privo di vera definizione. Non ha alcuna dimensione.

Il piano

Anche per il piano abbiamo avuto alcune difficoltà nel dare una definizione geometrica e all'inizio abbiamo dato delle spiegazioni fantasiose: "uno strumento", "un piano di un grattacielo", "la superficie di un tavolo". Geometricamente *il piano è il terzo ente fondamentale, è un insieme continuo e infinito di rette e ha solo due dimensioni la larghezza e la lunghezza.*

Quando ci è stato presentato il problema ci siamo guardati stupiti! "Ma che problema è? Certo che le affermazioni sono vere! Il piano ha infiniti punti quindi è ovvio che le tre affermazioni siano vere."

Abbiamo cominciato a scarabocchiare su fogli: punti, linee... sembrava tutto ovvio.

Ma Elena, la ricercatrice, aveva sempre un perché in più!

Voleva delle dimostrazioni!? Boh!!! Ci siamo resi conto che forse non era tutto così scontato e che dovevamo cambiare metodo. Quindi abbiamo deciso di procedere per piccoli passi. Affrontando prima alcune situazioni molto semplici.

Prime considerazioni

Se immaginiamo un piano che abbia tutti i punti bianchi, o tutti i punti neri, è molto semplice dimostrare le tre affermazioni del problema perché è possibile utilizzare qualsiasi punto nel piano.

Se immaginiamo un piano con punti tutti bianchi e solo un punto nero, o viceversa, non riusciamo a dimostrare le affermazioni usando i punti neri perché ce n'è solo uno sul piano e quindi utilizziamo i punti bianchi.

Se immaginiamo un piano con punti tutti bianchi e un numero finito qualsiasi di punti neri (o viceversa) la situazione non cambia perché basta spostarsi lontano dai punti neri, che sono in numero finito su un piano infinito.

Se abbiamo una linea (formata da punti neri) per dimostrare le tre richieste è possibile usare i punti bianchi del piano. Nonostante una linea sia formata da infiniti punti!

Analizziamo nel dettaglio le tre affermazioni del problema con considerazioni valide per qualsiasi colorazione del piano.

Prima affermazione

Immaginiamo di avere un sacchetto contenente delle biglie bianche e nere.

Se eseguiamo delle estrazione a caso, qual è il numero minimo di estrazioni da effettuare per essere sicuri di pescare due biglie dello stesso colore? Devo fare al più tre estrazioni.

Quindi abbiamo intuito che individuato un punto sul piano, qualunque sia il suo colore, dobbiamo cercare un altro punto con distanza minore di 2, e un terzo sempre a distanza minore di 2 da entrambi i punti fissati prima. Di questi tre punti almeno due saranno dello stesso colore.

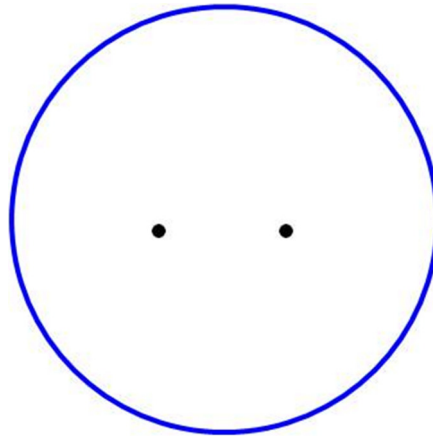
Per spiegare questo abbiamo immaginato di coprire il piano (con punti bianchi e neri disposti a caso) con un telo e di bucarlo con uno spillo per vedere il colore dei punti scelti.



Immaginiamo che bucando troviamo un punto nero. Da questo punto calcoliamo una distanza minore di 2 e ribuchiamo il telo. Se il punto trovato è nero possiamo tracciare il segmento confermando così la prima ipotesi. Se il punto, invece, è bianco dobbiamo ribucare il telo però a distanza minore di 2 da entrambi i buchi fatti prima. Il terzo punto sarà bianco o nero, e quindi sicuramente uguale a uno dei due punti trovati prima. Uniamo

con un segmento i due punti dello stesso colore confermando così definitivamente la prima ipotesi.

Questo sul piano corrisponde a considerare un cerchio con raggio 1.



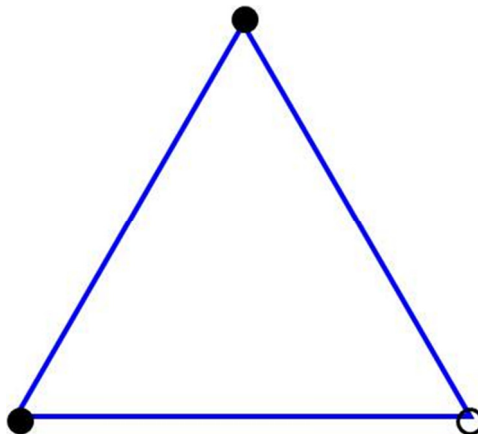
Ipotesizzando che nel cerchio ci sia un punto nero, se all'interno del cerchio c'è un altro punto nero abbiamo dimostrato la prima ipotesi, perché basta collegarli con un segmento che sarà minore di 2.

Se invece non ci sono altri punti neri, vorrà dire che sono tutti bianchi e basta collegarne due per avere un segmento minore di 2 e confermare così la prima ipotesi.

Seconda affermazione

Individuato un punto sul piano, bianco o nero che sia, bisognerà cercarne almeno altri due, stando attenti a trovarli tutti a distanza 2 l'uno dall'altro.

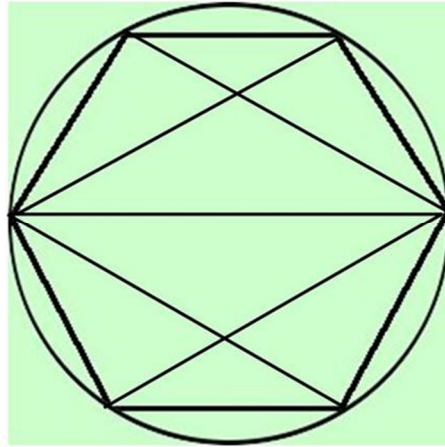
Fatto questo otteniamo un triangolo equilatero con lato 2 che avrà almeno 2 vertici dello stesso colore e quindi collegabili con un segmento di misura 2.



Terza affermazione

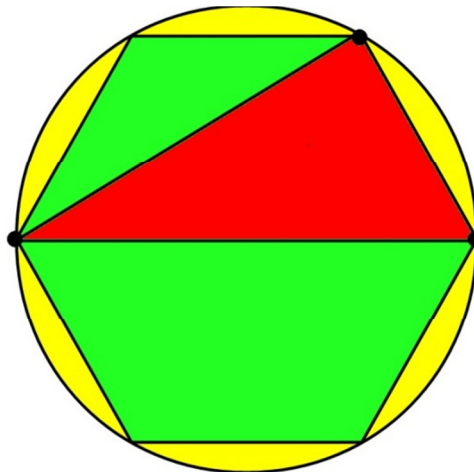
Considerando che esistono sempre due punti con distanza 2 (come abbiamo già dimostrato al punto precedente), possiamo usare questo segmento come diametro di un cerchio e ipotenuso di un triangolo rettangolo con angoli di 60° e 30° .

Per ogni diametro si possono costruire quattro triangoli con angoli di 60° , 30° e 90° , con l'angolo retto che insiste sulla semicirconferenza. Avremo quindi 6 punti sulla circonferenza corrispondenti ai 6 vertici di un esagono regolare con lato di lunghezza 1.

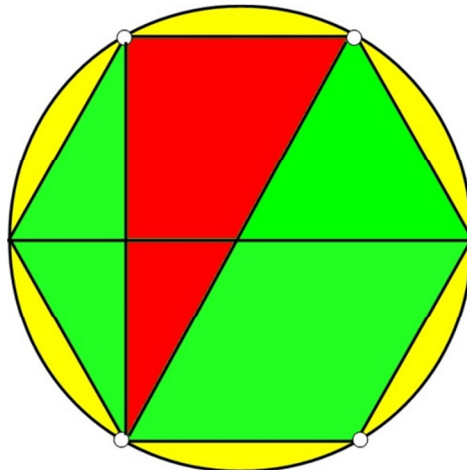


Supponiamo che gli estremi del diametro siano 2 punti neri (o bianchi).

Se uno dei restanti vertici dell'esagono è nero (o bianco) non ci sarebbe nessuna difficoltà, l'affermazione è vera: abbiamo un triangolo rettangolo avente come ipotenusa il diametro, come cateto minore un lato dell'esagono, che forma con il diametro un angolo di 60° , e come cateto maggiore una corda.



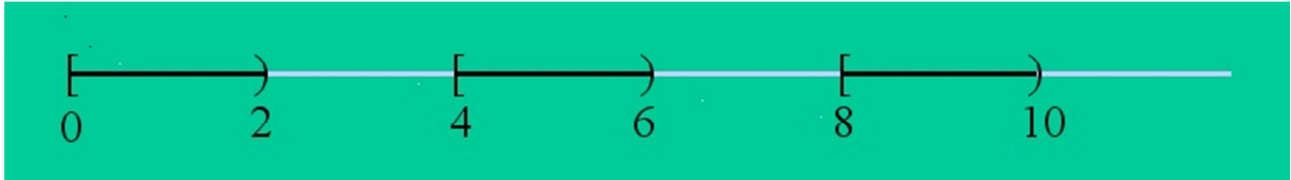
In caso contrario significa che i restanti vertici sono bianchi, e quindi tre qualsiasi di essi individuano un triangolo del tipo richiesto, con i vertici dello stesso colore. Quindi anche in questo caso l'ipotesi è vera.



Casi particolari: caso retta

Qualcuno di noi è riuscito a dimostrare che la seconda ipotesi del problema può non essere valida lavorando su una retta piuttosto che nel piano.

Abbiamo immaginato una colorazione della retta a segmenti alternati bianchi e neri di lunghezza 2 considerando gli estremi come indicato nella figura sottostante.



La parentesi quadra indica l'estremo compreso che sarà nero. La parentesi tonda indica l'estremo escluso, da noi battezzato "l'incompreso", che sarà quindi bianco.

Su una retta colorata in questo modo qualsiasi segmento di lunghezza 2 avrà gli estremi di colore diverso.

Verifichiamolo con alcuni esempi:

Primo estremo	Colore	Secondo estremo	Colore
1	Nero	3	Bianco
0	Nero	2	Bianco
2	Bianco	4	Nero

Abbiamo quindi dimostrato che per questa colorazione particolare della retta non esiste un segmento di lunghezza 2 i cui vertici abbiano lo stesso colore.

A questo punto ci siamo chiesti perché sul piano l'affermazione è sempre valida, mentre sulla retta esiste almeno un caso in cui crolla? La retta e il piano saranno due infiniti diversi?

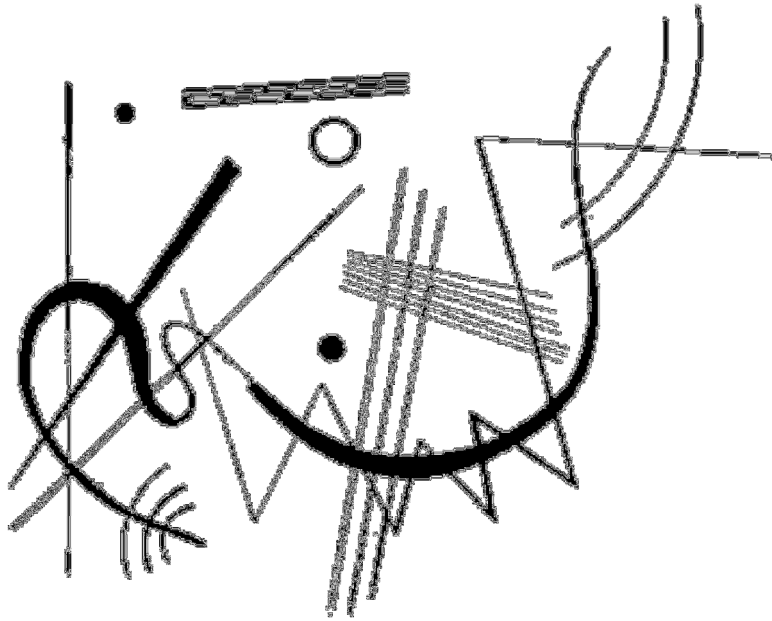
Il problema non è per niente banale... Lo lasciamo aperto per successivi sviluppi.

Conclusioni

Abbiamo quindi verificato che se un piano viene colorato casualmente in bianco e nero.

1. esistono sempre 2 punti dello stesso colore la cui distanza è minore di 2;
2. esiste un segmento di lunghezza 2 i cui vertici hanno lo stesso colore. Nel caso particolare della retta con colorazione alternata, abbiamo però verificato che qualsiasi segmento di lunghezza 2 avrà gli estremi di colore diverso;
3. esiste sempre un triangolo rettangolo con l'ipotenusa di lunghezza 2 e un angolo acuto di 60° tale che i suoi vertici sono dello stesso colore.

Nota artistica



Avete notato lo sfondo della nostra proiezione?

Si tratta di un'opera di KANDINSKY, tratta da "PUNTO LINEE E SUPERFICIE".

Vassily Kandinsky (Mosca, 4 dicembre 1866 – Neuilly sur Seine, 13 dicembre 1944), è un pittore russo, creatore della pittura astratta.

Kandinskij nel saggio "PUNTO LINEE E SUPERFICIE" si dedica alla parte grafica della pittura che può esistere anche senza il colore.

"Il punto è il primo nucleo del significato di una composizione, nasce quando il pittore tocca la tela; è statico. La linea è la traccia lasciata dal punto in movimento, per questo è dinamica. Può essere orizzontale; verticale, diagonale. Può essere spezzata, curva, mista. I singoli suoni possono essere mescolati tra loro; più la linea è variata, più cambiano le tensioni spirituali che suscita: drammatiche se è spezzata, più liriche se è curva. Anche lo spessore cambia: può essere sottile, marcato, spesso, variabile. La superficie è il supporto materiale destinato a ricevere il contenuto dell'opera, si tratta solitamente di una tela (ma Kandinskij ha dipinto anche del vasellame). L'opera risulta dunque essere limitata da due linee orizzontali e due verticali, oppure da una linea curva (per la tela a formato ellittico). L'autore può dare accentuazione alle forme girando la tela e sfruttandone i piani diversi, ma non può fare quest'azione a posteriori, bensì ci vuole fin alla creazione dell'opera lucidità e consapevolezza artistica."