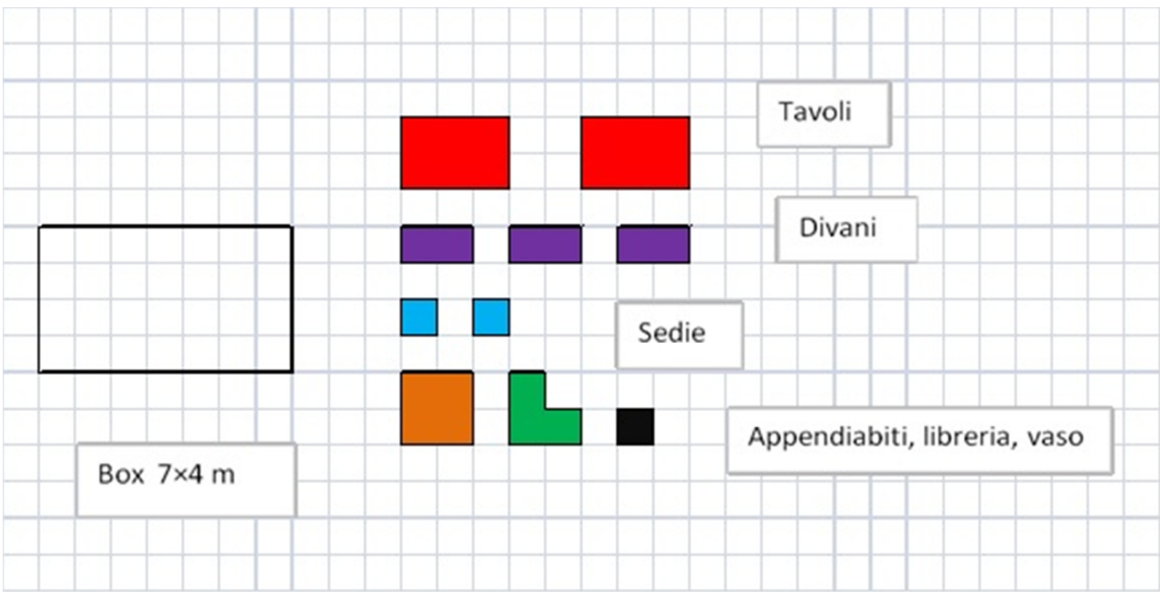
Il trasloco geometrico

Scuola Media V Giornate – Milano
Classi: 2°A, 2°B e 2°C
Insegnanti di riferimento: Debora Bianchi, Monica Cairo, Emma Caruso e Angela Greco
Ricercatore: Rosina Cavallaro
Ragazzi partecipanti: Tiziano Barbatiello, Alessandro Beltaro, Adelaide Bozzoli-Parasacchi, Morena Cappelletti, Francesca Caregari, Luca Cipriani, Nicolò De Panfilis, Miriam Dicembre, Caterina Franco, Francesco Freri, Alice Galli, Carlotta Gavina, Margherita Ghiglioni, Pang Jung, Andrea Kaldas, Maya Labate, Alessia Loggia, Federico Molvini, Giorgia Mulè, Leonardo Pisoni, Camilla Santi, Gaia Saviotti, Davide Toffolon, Mattia Vigorelli, Alice Zoccoli

Primo quesito

Il proprietario di un negozio di mobili in cristallo decide di rifare il negozio e si affida alla ditta di un conoscente per l'immagazzinamento temporaneo dei suoi articoli.
La ditta dispone solo un box di dimensioni 7×4×3 *m (lunghezza×larghezza×altezza).*
*I diversi oggetti che il proprietario ha già inscatolato sono (*Dis.1*):*

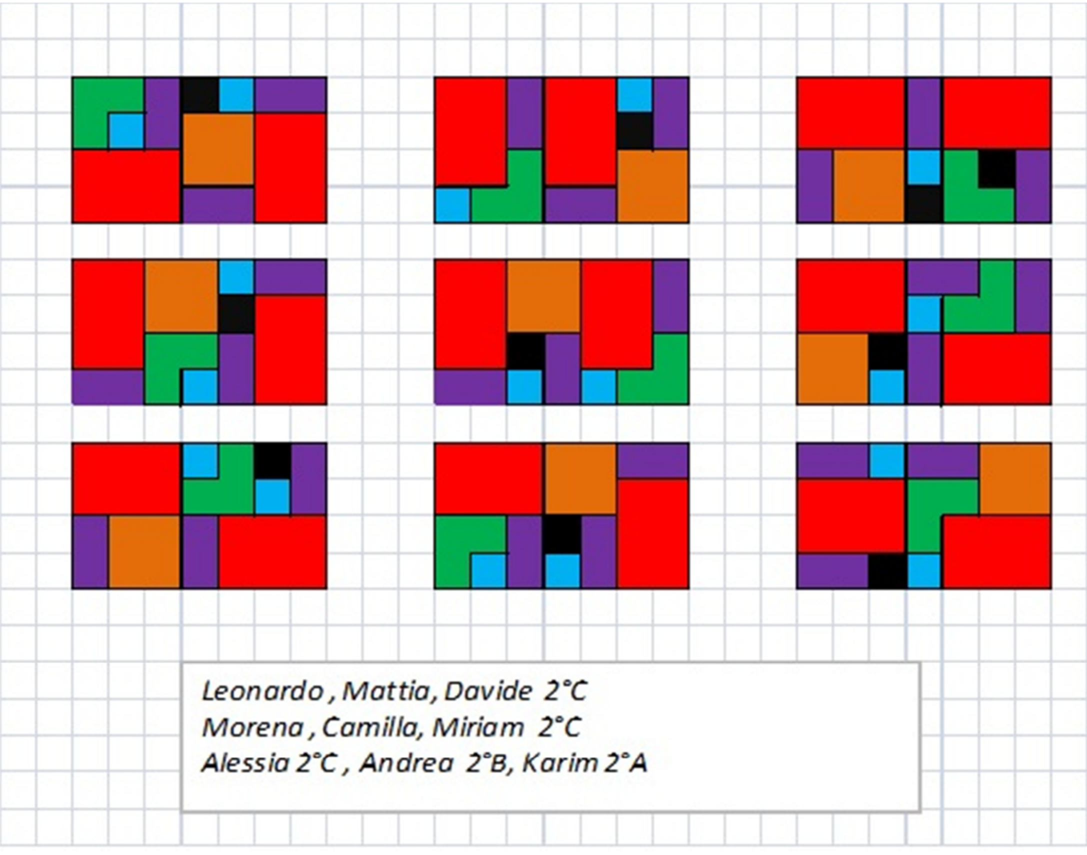
- 2 *tavoli (*3×2×1 *m);*
- 2 *sedie (*1×1×0.7 *m);*
- 3 *divani (*2×1×1 *m);*
- 1 *appendiabiti (*2×2×2 *m);*
- 1 *vaso (*1×1×1.5 *m);*
- 1 *libreria (a forma di L –* 2×2 *m).*



Dis.1

Il proprietario non vuole assolutamente che vengano sovrapposte le varie scatole e che i mobili di uguale tipologia siano posizionati l'uno vicino all'altro, in quanto lo stesso tipo di cristallo se sottoposto a vibrazione entrerebbe in risonanza e potrebbe rompersi.
Come si possono disporre le scatole?

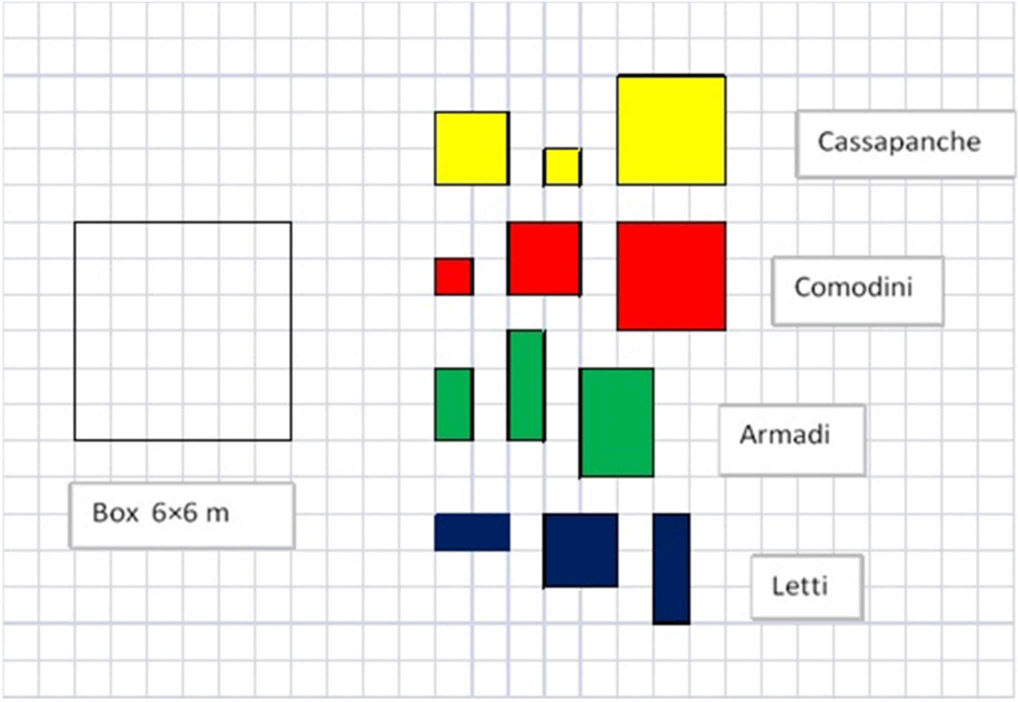
Possibili disposizioni delle scatole all'interno del box:



Dis.2

Secondo quesito
Un cliente porta all'ultimo secondo dei mobili molto pregiati al proprietario di un negozio che decide di acquistarli e trasportarli in un box.
I mobili sono smontabili e si vuole approfittare di questa loro proprietà per farli stare in un unico box 6×6×3 *m (lunghezza×larghezza×altezza) senza sovrapporli e lasciandoli "paralleli" alle pareti del box (*Dis.3*):*

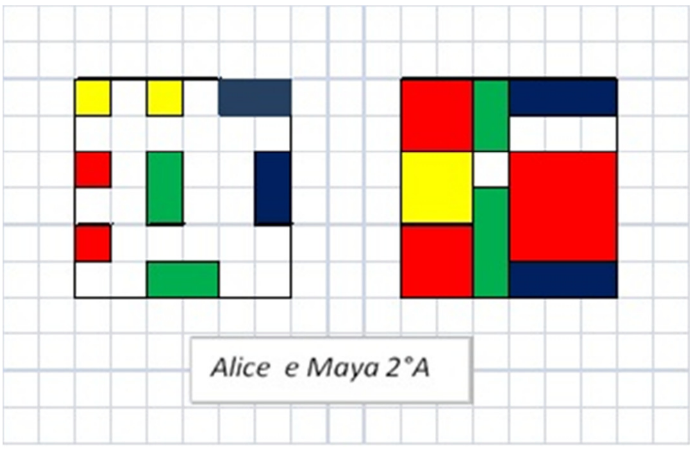
- *2 cassapanche:* 2×2×0.2 *m,* 1×1×0.2 *m,* 3×3×0.2 *m;*
- *2 comodini :* 1×1×0.6 *m,* 2×2×0.6 *m,* 3×3×0.6 *m;*
- *2 armadi:* 1×2×2.8 *m,* 1×3×2.8 *m,* 2×3×2.8 *m;*
- *2 letti:* 2×1×1 *m,* 2×2×1 *m,* 1×3×1 *m.*



Dis.3

Considerate i diversi casi in cui debbano essere rispettate alcune condizioni:

- *Due oggetti uguali non si devono toccare (*Dis.4*).*

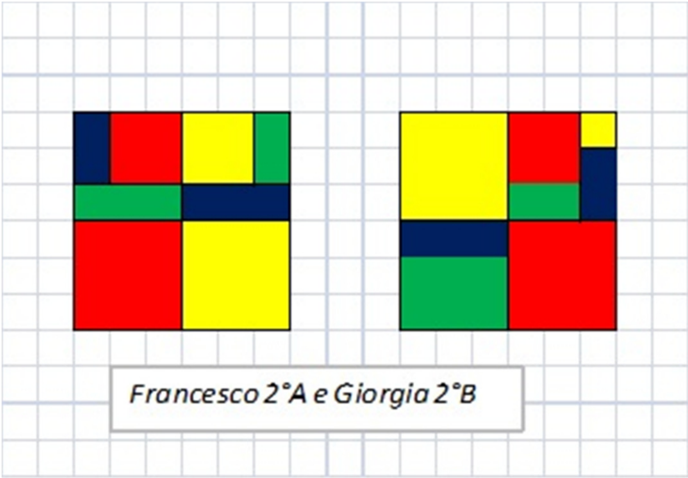


Dis.4

La seconda soluzione da noi suggerita mostra come non sia necessario usare tutti gli oggetti con dimensioni più piccole.

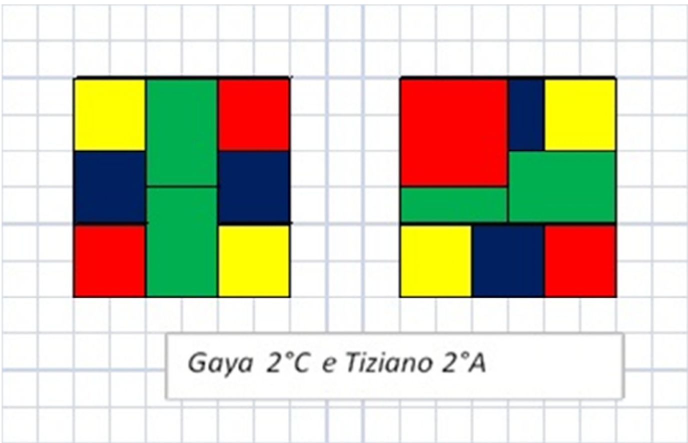
- *Due oggetti uguali non si devono toccare, tutto lo spazio del box deve essere occupato (*Dis.5*).*

A posteriori, ci siamo resi conto che la richiesta non è molto diversa da quella presente nel quesito dei cristalli, ma permette di iniziare a utilizzare l'area di un quadrato anziché quella di un rettangolo, necessario alla risoluzione per il terzo quesito.



Dis.5

- *Comodini e cassapanche non si possono toccare, oggetti uguali si possono toccare (*Dis.6*).*

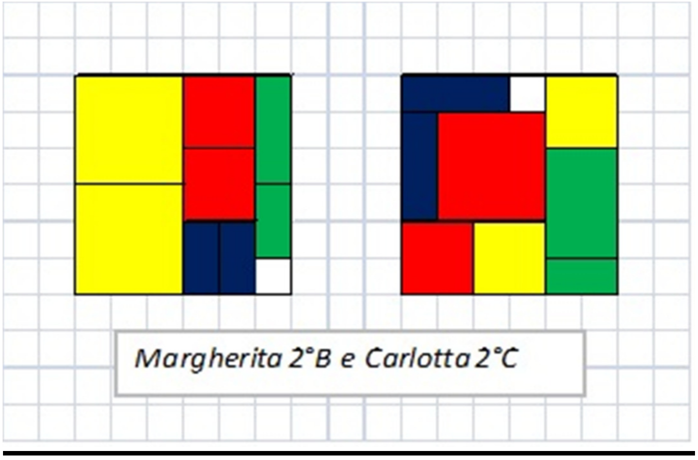


Dis.6

- *Comodini e cassapanche non si possono toccare, oggetti uguali non si possono toccare.*

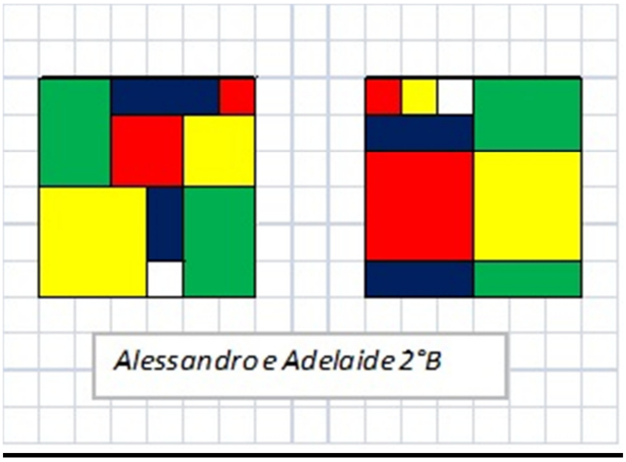
Non esiste una configurazione in grado di soddisfare questa richiesta. Se comodini e cassapanche non possono toccarsi, devono necessariamente farlo gli altri oggetti restanti, anche uguali fra loro.

- *Letti e comodini si devono toccare, gli oggetti uguali si possono toccare e deve rimanere un quadretto vuoto (*Dis.7*).*



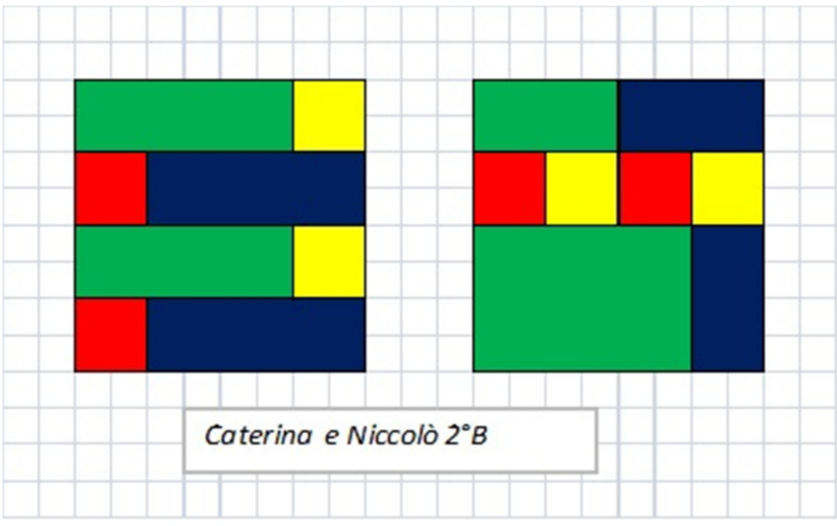
Dis.7

- *Letti e comodini si devono toccare, gli oggetti uguali non devono toccarsi e deve rimanere un quadretto vuoto (*Dis.8*).*



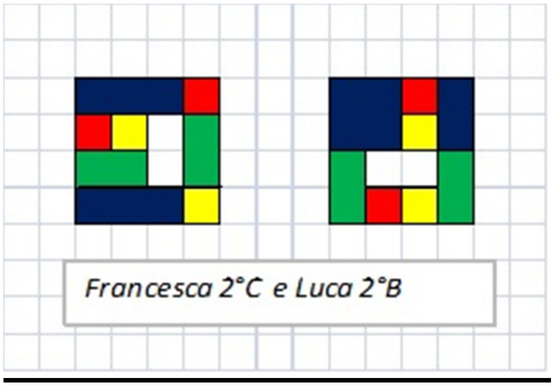
Dis.8

- *In un box 8×8 m utilizzo gli stessi oggetti ma con misure raddoppiate (*Dis.9*).*



Dis.9

- *Scegliere una combinazione di misure (abbiamo lasciato le stesse misure per i mobili) e trovare il quadrato minimo in cui possono essere inseriti, lasciando due spazi vuoti (*Dis.10*).*



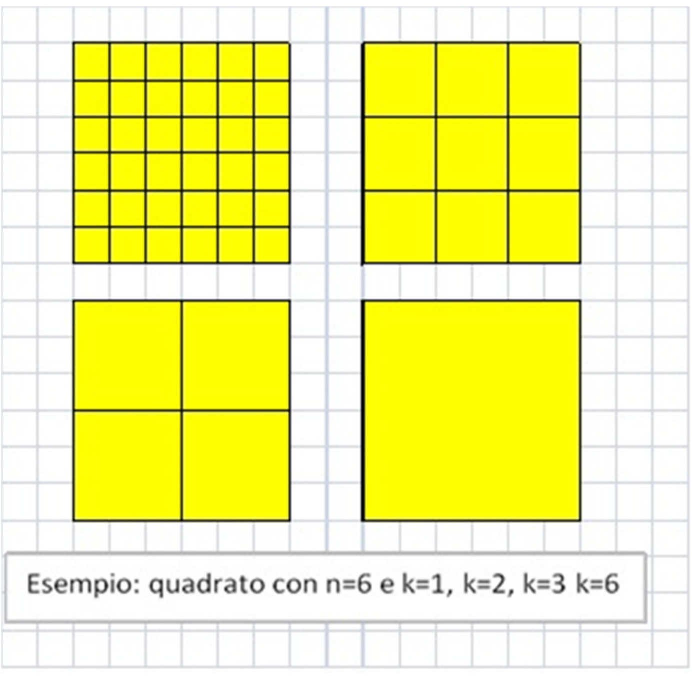
Dis.10

Il quadrato minimo trovato è un 4×4 m dato che la somma delle aree degli oggetti più piccoli è di 12 m^2.

La richiesta degli ultimi due casi permette di iniziare a utilizzare un quadrato in cui è stato variato il lato, necessario alla risoluzione del terzo quesito.

Terzo quesito
Il terzo quesito è articolato in due parti:

1) *Siano n e j numeri naturali e sia N quadrato di lato n e J quadrato di lato j. Fissato N, trovare quali e quanti J possono ricoprire totalmente l'area del quadrato N senza spazi e senza sovrapposizioni (*Dis.11*).*



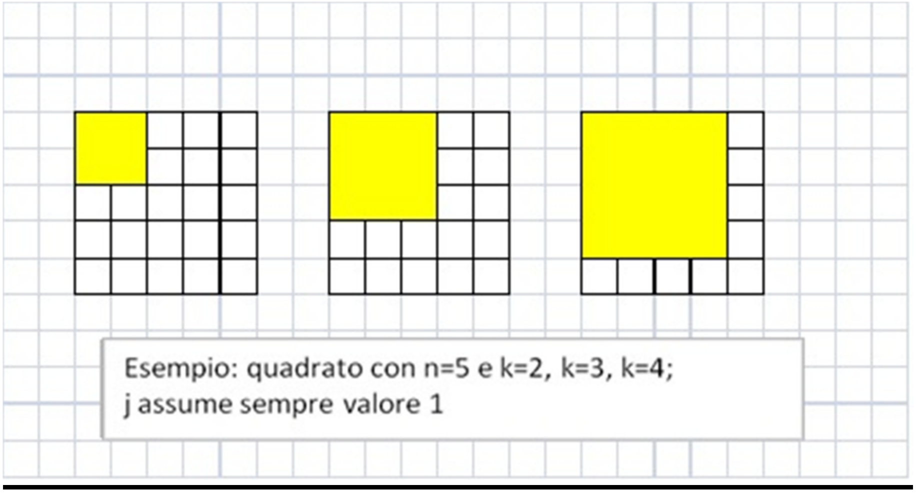
Dis.11

Tutti i quadrati N possono essere ricoperti con quadrati di lato j=1 e con un quadrato di lato j=n .

I quadrati J che possono riempiere N sono quelli che possiedono un lato j, dove j è un numero che è divisore del lato n (se il quadrato iniziale ha lato n=6 allora andranno bene i quadrati di lato j=1,2,3,6).

Dato un quadrato di lato n, j un divisore di n, il numero di quadrati di lato j che ricoprono l'area del quadrato N sarà uguale a $(n^2)/(j^2)$, cioè l'area del quadrato di partenza con lato n diviso l'area del quadrato di lato j con cui andrà ricoperto.

2) *Siano n, j, k numeri naturali, con j diverso da k, sia N quadrato di lato n e J quadrato di lato j, K quadrato di lato k. Fissato N, fissato K in alto a sinistra di N, trovare quali e quanti J possono ricoprire totalmente l'area restante senza spazi e senza sovrapposizioni.*



Dis.12

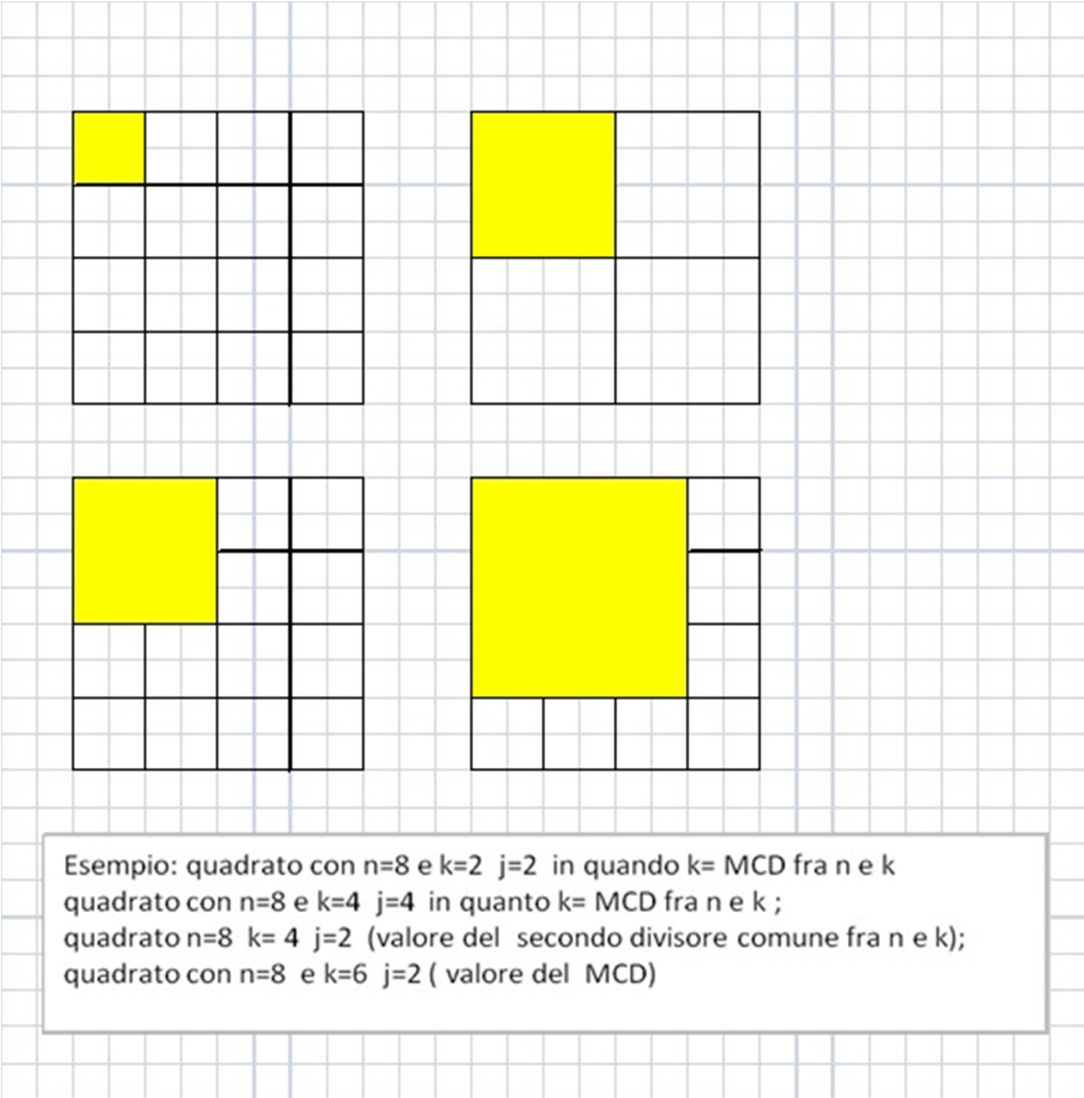
Tutti i quadrati N indipendentemente dai valori di n e k (eccetto per k=1, in cui k=j=1) possono essere ricoperti con quadrati di lato j=1; j=1 è invece l'unico quadrato che può essere utilizzato per qualsiasi n ma con k=n-1.

Se n è numero primo, per qualsiasi quadrato K fissato, i quadrati di riempimento assumono come unico valore diverso da k, j=1 (Dis.12).

Se n è invece numero composto, k e j risultano diversi se e solo se sia n che k sono divisibili per un divisore comune che sarà MCD, o più divisori comuni di cui solo uno sarà il MCD: allora j assume il valore del/dei divisore/i comune/i a k e n.

Il valore di k non deve essere però uguale a quello del MCD perché altrimenti k=j.

Il numero di quadrati di lato J contenuti in N, fissato K, sono uguali a $(n^2 – k^2)/(j^2)$ cioè l'area del quadrato di partenza con lato n meno l'area del quadrato con lato k, diviso l'area del quadrato di lato j con cui andrà ricoperto (Dis.13).


Esempio: quadrato con n=8 e k=2 j=2 in quando k= MCD fra n e k
quadrato con n=8 e k=4 j=4 in quanto k= MCD fra n e k ;
quadrato n=8 k= 4 j=2 (valore del secondo divisore comune fra n e k);
quadrato con n=8 e k=6 j=2 (valore del MCD)

Dis.13