

# Una discussione infinita

Scuola secondaria di I grado - Collegio Arcivescovile Alessandro Volta - Lecco

Classe: 2°B

Insegnante di riferimento: Lucia Vergottini

Ricercatore: Elena Panzeri

Ragazzi partecipanti: Giacomo Anghileri, Giulia Arcioni, Eduardo Ascari, Giorgio Baselice, Stefano Baselice, Federico Biffi, Luca Calcagni, Andrea Cerviatti, Filippo Corbetta, Andrea Cortella, Alessia Frigerio, Filippo Frigerio, Jacques Invernizzi, Riccardo Licini, Maddalena Luconi, Maria Moscheni, Giulia Predaroli, Luigi Ripamonti, Leonardo Rusconi, Giulio Taccani Gilardoni, Enrico Tentori

Quest'anno abbiamo partecipato a un progetto proposto dal Centro "matematita" con un titolo affascinante: "Una discussione infinita". Il titolo del nostro lavoro rende bene l'idea perché è iniziato tutto un mercoledì di novembre e ancora oggi ci troviamo in classe a convincere, a convincerci a... parlare di INFINITO... non pensavamo che fosse così divertente discutere di matematica!!! Il quesito proposto è stato:

Chiara e Federico stanno discutendo animatamente...

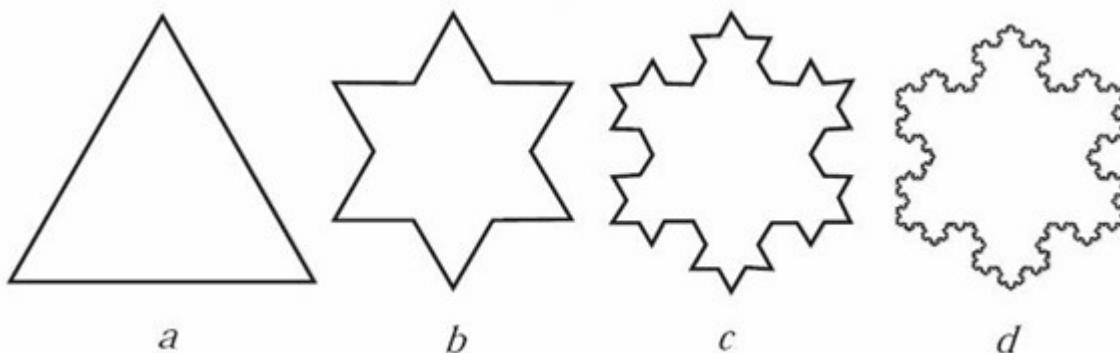
Chiara sostiene che se sommo infiniti addendi ottengo qualcosa di misura infinita,

Federico invece pensa che la somma sia un numero finito.

Per argomentare le loro tesi portano come esempi "La gara con la tartaruga" e "La stella a mille punte". Chi dei due porta quale esempio? Chi ha ragione? Perché?

Abbiamo studiato in particolare la stella a mille punte. Per costruire questo frattale

- si parte da un segmento di data lunghezza,
- lo si divide in altri tre segmenti uguali
- si cancella il segmento centrale, sostituendolo con due segmenti identici che costituiscono i due lati di un triangolo equilatero;



Proprio perché parlavamo di “segmenti” ci siamo chiesti se IL SEGMENTO è costituito da infiniti punti. Quando pensiamo a un segmento pensiamo a qualcosa di limitato, al contrario, quando si parla di retta accettiamo con una certa facilità che possa essere qualificata infinita: per quanto grande possiamo immaginare un disegno che la rappresenti essa può essere sempre prolungata quanto si vuole. Per questo molti di noi sostenevano che il segmento è un ente geometrico costituito da un numero finito di punti. Abbiamo, pertanto, ripreso la definizione di PUNTO come ENTE GEOMETRICO PRIVO DI QUALSIASI DIMENSIONE e quindi concluso che il segmento è costituito da un insieme infinito di punti. Presi due punti appartenenti ad un segmento, infatti, riusciamo sempre a trovarne uno compreso visto che è piccolo e senza dimensioni.

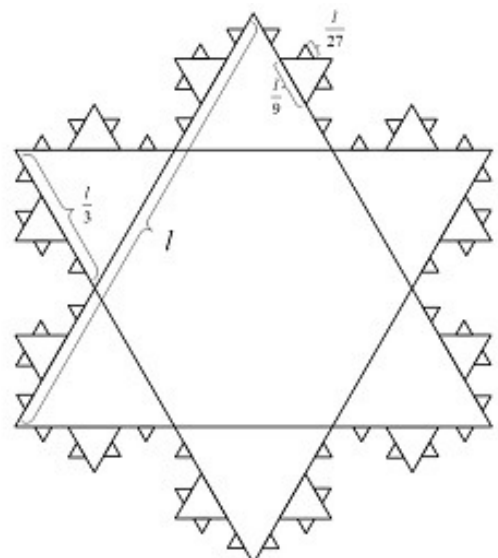
Inoltre quando pensiamo a una sommatoria di infiniti addendi pensiamo a qualcosa di infinito. Ci siamo accorti invece che sommare infiniti addendi non porta necessariamente all'infinito. Per esempio possiamo pensare di spezzare il gesso della nostra lavagna a metà, poi spezzare a metà una delle due metà e così via. È chiaro che, riaccostando i frammenti ottenuti, si deve riottenere il gesso di partenza. Abbiamo provato anche con una pagina del nostro quaderno di matematica, l'abbiamo tagliata in 2 parti e osservato che se riunite componevano sempre la pagina iniziale; poi in 4, poi in 8, poi in 16 e ancora in 32... abbiamo sempre osservato che potevano essere unite e formare la pagina del nostro quaderno.

Prima abbiamo osservato ciò che avevamo sotto gli occhi: la stella e le misure, poi

- abbiamo interpretato i dati in modo critico, cercando di scorgere una legge che li regolasse
- abbiamo quindi elaborato una CONGETTURA, cioè abbiamo pensato a una legge che ci sembrasse sensata rispetto ai dati a nostra disposizione

Abbiamo concluso che il perimetro della stella a mille punte tende all'infinito, ma ci siamo accorti che il fatto di aggiungere infiniti segmentini non bastava per farci affermare che la somma è infinita, infatti: partiamo da un segmento lungo 1 e lo dividiamo a metà; dei due pezzi ottenuti, uno lo mettiamo in un sacchetto, l'altro lo teniamo e lo dividiamo a sua volta a metà; di nuovo, dei due pezzi ottenuti, uno lo mettiamo nel sacchetto, l'altro lo teniamo per dividerlo nuovamente a metà e così via all'infinito. In questo modo otteniamo sì una sommatoria di segmentini, ma **la somma degli infiniti segmentini contenuti nel sacchetto è finita.**

Però **cambiamo punto di vista** e immaginiamo di avere un sacchetto pieno di infiniti segmentini, alcuni più corti, altri più lunghi: non siamo più certi che la loro somma sia finita. Questo è il caso della stella a mille punte: di volta in volta aggiungiamo un certo numero di segmenti: è come se avessimo a disposizione un sacchetto pieno di segmenti e ad ogni passaggio prendessimo da lì i segmenti da aggiungere alla stella. Questa operazione avviene su ogni punta, un numero infinito di volte, quindi siamo in una situazione diversa dalla precedente.



Studiando i primi passaggi per calcolare il perimetro della stella abbiamo osservato un certo andamento; passo 0: un triangolo di lato 1, il perimetro pertanto è uguale a 3; passo 1: il lato viene diviso in 4 segmenti lunghi  $1/3$  quindi il perimetro è costituito da 12 segmenti lunghi  $1/3$ ; passo 2: il lato è ora costituito da 16 segmenti lunghi  $1/9$ , pertanto la nuova figura sarà costituita da 48 segmenti lunghi  $1/9$  e così via. Abbiamo quindi osservato l'andamento del perimetro, allora ci siamo chiesti se questa regola valida per i primi passaggi potesse essere considerata vera anche al millesimo passaggio e all'infinito. Abbiamo trovato molti esempi matematici a riguardo, ma per semplificare il discorso riportiamo un esempio concreto della vita quotidiana: quando siamo nati, eravamo molto piccoli, poi di anno in anno siamo cresciuti, diventando sempre più alti. Si osserva dunque che, nei nostri primi 12 anni di vita, ogni anno la nostra altezza è aumentata in maniera significativa; possiamo concluderne che ogni anno diventeremo sempre più alti? NO, come ci conferma la pratica: da una certa età in poi la nostra altezza rimarrà sempre la stessa.

Occorre quindi una dimostrazione che renda la nostra formula valida anche all'infinito.

Effettuando i calcoli, abbiamo notato che il perimetro di ciascuna figura è uguale al perimetro di quella precedente moltiplicato per un fattore costante  $4/3$ . quindi il perimetro di ogni figura può essere espresso tramite la formula generale:

$$\text{perimetro della stella} = (4/3)^n \cdot P_1$$

L'elevamento a potenza di una frazione propria (cioè minore di 1) all'infinito tende a 1, ma l'elevamento di una frazione impropria (cioè maggiore di 1, come in questo caso) tende all'infinito perché vengono moltiplicati fattori maggiori di 1; pertanto, in una stella a mille punte il perimetro tende all'infinito.

E l'area? Nelle nostre discussioni abbiamo sempre concluso che la stella a mille punte tende a una ruota dentata. Se immaginiamo di contenere questa figura in una circonferenza possiamo affermare che questa ruota non potrà mai superarla, pertanto l'area della stella a mille punte è FINITA.

## Conclusioni

Non abbiamo avuto il tempo necessario per portare a termine il nostro problema, ma abbiamo imparato che l'esempio della stella a mille punte può essere considerato per spiegare entrambe le questioni: la somma di infiniti addendi è qualcosa di misura infinita, se si considera il perimetro; la somma di infiniti addendi è un numero finito, nel caso dell'area.