



da **NUMERIA**
di **SERGIO FABRIS**

1. Il primo “specialista”: Apollonio di Perga.

Tre furono i matematici dell'età ellenistica (cioè del periodo che si usa² far andare dal III secolo a.C. al IV secolo d.C.) che sovrastarono tutti gli altri del loro tempo. Pur essendo diverse le loro sfere di interesse, il loro contributo allo studio della matematica è stato ugualmente determinante; essi furono Euclide, Archimede e Apollonio.

Euclide è il grande teorico della geometria e dell'aritmetica che studia, raggruppa e dà rigore alle conoscenze matematiche fino allora acquisite senza preoccuparsi delle loro applicazioni pratiche; Archimede è invece il grande ingegnere curioso di conoscere le leggi della natura, che non disdegna di applicare nella pratica. Della vita di Apollonio conosciamo ancor meno che dei primi due, ma a giudicare dall'unica sua opera che ci è pervenuta, sembra che abbia voluto conoscere tutto quanto era umanamente possibile sapere, ma relativamente a un argomento specifico: lo studio delle figure geometriche chiamate coniche. Con una estrema semplificazione potremmo dire che Euclide è il matematico teorico, Archimede il fisico matematico, Apollonio lo specialista.

Apollonio (262? – 190? a. C.) nasce a Perga, in Pamfilia (l'attuale Turchia), e riceve la sua educazione scientifica ad Alessandria; per un certo periodo vive anche a Pergamo, sede di un'Accademia e di una biblioteca la cui importanza è seconda solo a quella del Museion di Alessandria. Scrive alcuni testi di astronomia e di matematica che sono andati perduti, ma l'argomento cui dedica tutta la vita è lo studio di quelle figure geometriche che sono dette coniche. Su queste scrive un'opera che lo ha reso celebre e che gli ha fatto attribuire l'appellativo di "Grande Geometra": “Le Coniche”, appunto. Essa consiste di otto libri, dei quali possediamo i primi quattro in versione originale, quelli dal quinto al settimo nella loro traduzione araba, mentre l'ottavo è andato perduto.



Apollonio di Perga

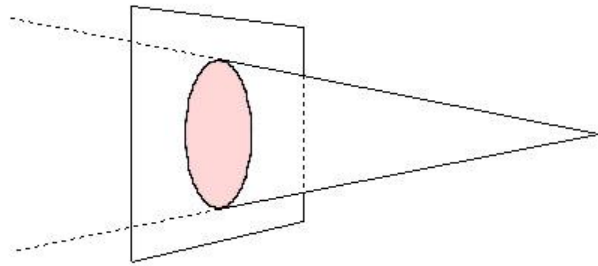
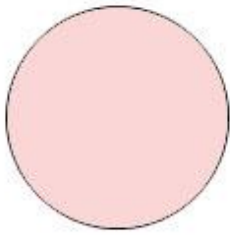
Le coniche

Per capire quali sono le figure che Apollonio ha chiamato coniche facciamo il seguente esperimento: prendiamo un piccolo pezzo di tubo, e infiliamo al suo interno una lampadina accesa, o meglio una sorgente di luce puntiforme. Consideriamo, per adesso, soltanto la luce che esce da una delle due estremità del tubo: se la proiettiamo su una superficie piana, a seconda dell'inclinazione di quest'ultima si formeranno immagini luminose diverse. I loro contorni sono le figure che prendono il nome di coniche.

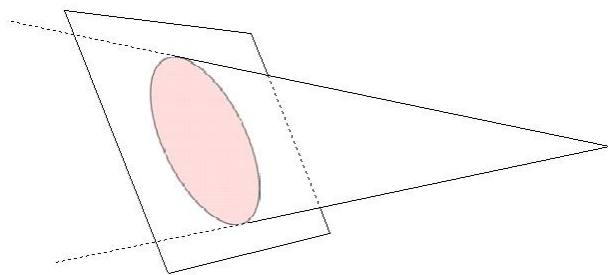
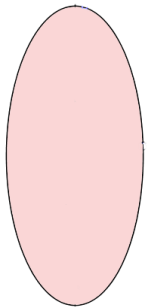
¹ L'immagine di apertura: *Pitagora*, particolare da “La Scuola di Atene” di Raffaello (Stanza della Segnatura - Musei Vaticani).

² Di primo ellenismo si parla per il periodo che va dal 323 a.C. (anno in cui muore Alessandro Magno) al 31 a.C. (anno in cui Roma conquista l'Egitto, ultimo stato di impronta ellenica), ma questa scansione può essere ampliata fino al 529 d.C. quando l'imperatore Giustiniano chiude l'Accademia platonica, comprendendo così un secondo ellenismo.

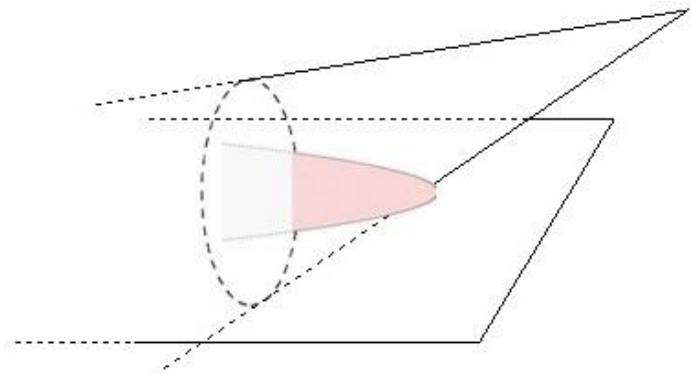
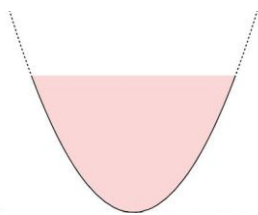
Vediamo allora quali immagini compaiono sulla superficie piana. Se questa è perpendicolare rispetto al tubo, il cono di luce proiettato dalla sorgente luminosa disegnerà sulla superficie un'immagine circolare: avremo la conica che chiamiamo cerchio.



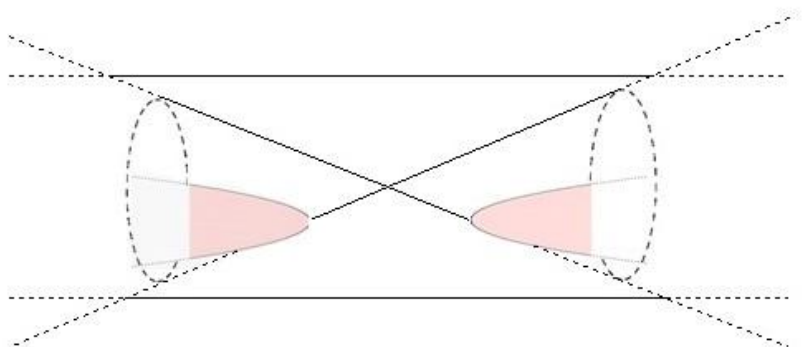
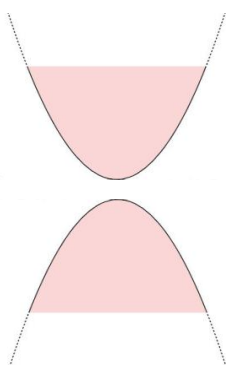
Se incliniamo appena un po' il piano rispetto al tubo, il cono di luce formerà un'immagine ovale, allungata: avremo la conica che chiamiamo ellisse.



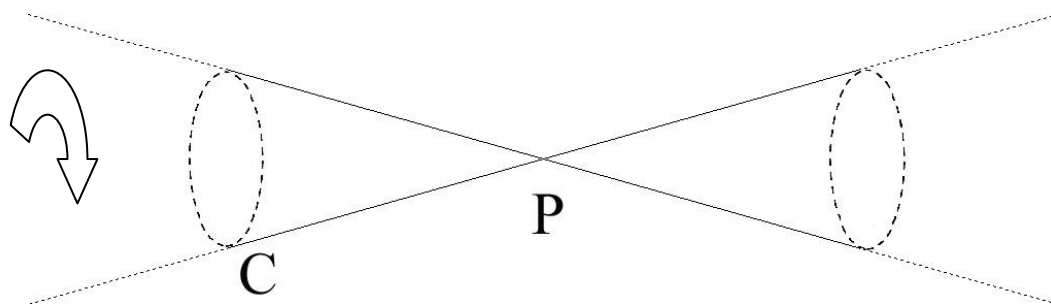
Se continuiamo a inclinare il nostro piano, la curva si allungherà sempre più, finché, a un certo punto, la luce non proietterà più una figura chiusa ma si avrà una parabola (vedi animazione [Non solo parabola](#)).



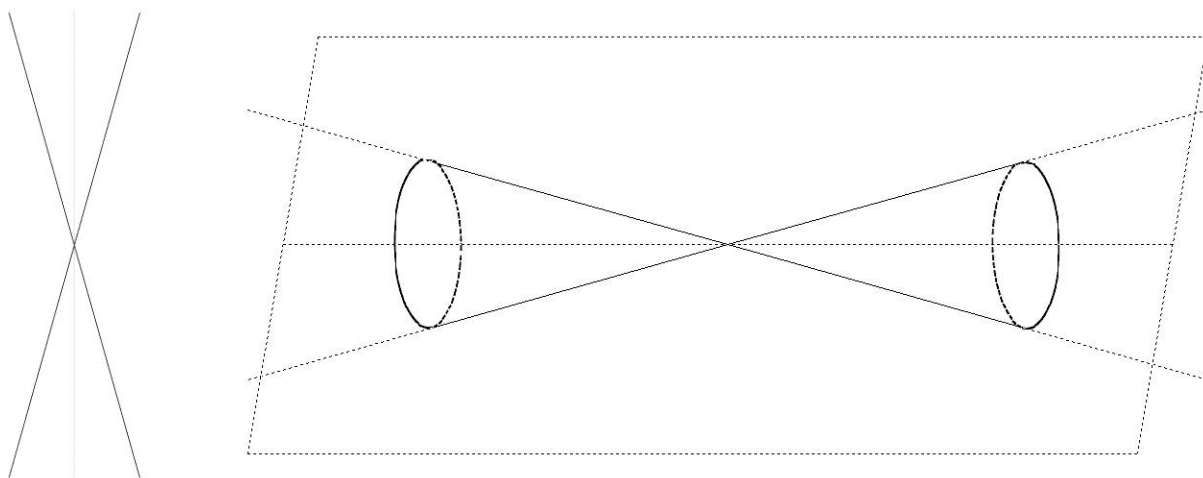
E non è ancora finita: se continuiamo a inclinare il piano, ad esempio se lo disponiamo parallelo al tubo, all'immagine proiettata verso sinistra se ne aggiungerà una seconda, a destra, generata dalla luce della sorgente luminosa che fuoriesce dalla parte posteriore del tubo, e l'immagine proiettata sul piano si sdoppia in due immagini, l'una a sinistra, l'altra a destra: i due rami di un'iperbole.



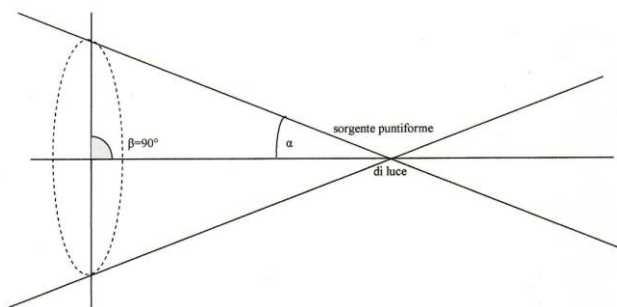
Apollonio aveva studiato queste curve come l'intersezione tra un piano e un cono a sezione circolare, cioè tra un piano e una superficie ottenuta come luogo delle rette che passano per un punto fisso – il vertice - e un punto variabile su una circonferenza (quello che qualcuno chiama “doppio cono”).



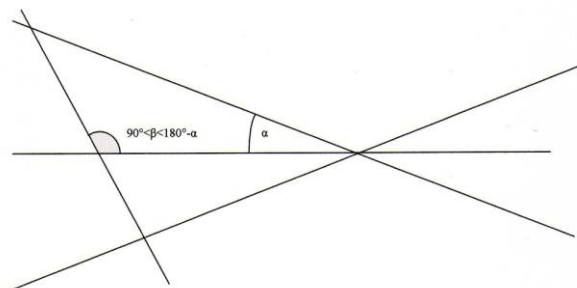
Questa osservazione ci porta a descrivere un ultimo caso: se il piano passa per la sorgente luminosa puntiforme e taglia tutte e due le parti del cono di luce, allora l'intersezione è costituita da due rette che si intersecano nel vertice del cono.



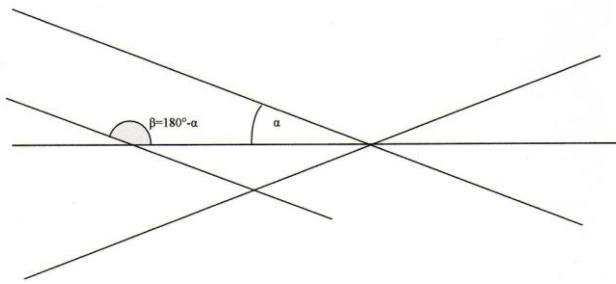
Indichiamo ora con 2α l'ampiezza dell'angolo al vertice del cono e con β l'ampiezza dell'angolo che individua la giacitura del piano rispetto al cono (si vedano le figure qui sotto). È proprio il valore dell'angolo β a stabilire di fronte a quale conica ci troviamo; precisamente



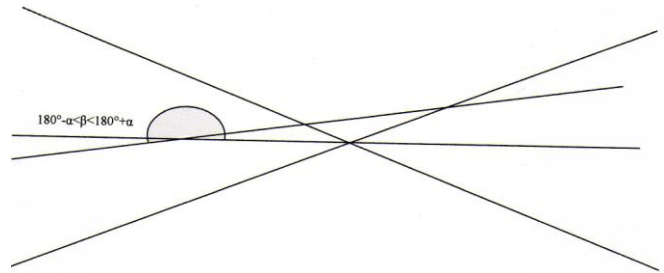
se $\beta = 90^\circ$ si ha un cerchio,



se $90^\circ < \beta < 180^\circ - \alpha$, si ha un'ellisse,



se $\beta = 180^\circ - \alpha$ si ha una parabola,



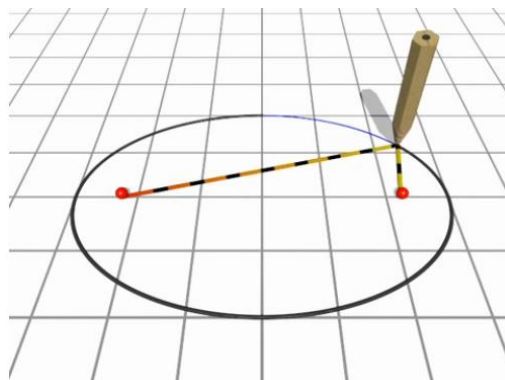
se $180^\circ - \alpha < \beta < 180^\circ + \alpha$ si hanno i due rami dell'iperbole,

A differenza del cerchio e dell'ellisse, l'iperbole e la parabola sono due curve "aperte", che non racchiudono un'area chiusa, ma "si allargano" sempre più via via che si allontanano dalla sorgente di luce. Tuttavia il loro comportamento è diverso: ognuno dei due rami dell'iperbole si allarga avvicinandosi sempre più a due rette che sono dette gli asintoti dell'iperbole (possiamo considerarli le sue tangenti all'infinito, se abbiamo abbastanza immaginazione). La parabola, invece, si allarga sempre più senza mai avvicinarsi ad alcuna retta e la sua curvatura varia lungo tutta la sua traiettoria.

OSSERVAZIONE 1

Qualche volta è più comodo descrivere le coniche - anziché come intersezione di un cono con un piano - a partire da alcune loro proprietà particolari. Allora, per esempio, l'ellisse è il luogo geometrico dei punti di un piano dai quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi (i cosiddetti fuochi).

Questa definizione suggerisce un modo semplice per costruire un'ellisse, lo stesso che viene adottato dai giardinieri per tracciare aiuole di forma ellittica. Si fissino su un foglio due punti (i fuochi), e si assicurino a tali punti gli estremi di un filo di lunghezza superiore alla loro distanza (la lunghezza di tale filo equivale alla somma delle distanze dai fuochi). Se si fa scorrere sul foglio la punta di una matita in modo che essa si appoggi costantemente al filo e questo sia teso, essa descrive un'ellisse.



Come si traccia un'ellisse – Immagine tratta dall'animazione [Ellisse:fissiamo il filo!](#)

Le definizioni delle altre coniche sono analoghe: il cerchio non è altro che un'ellisse con i fuochi coincidenti, l'iperbole è il luogo geometrico dei punti di un piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi (che anche qui sono detti fuochi); la parabola è il luogo

geometrico dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso (il fuoco) e da una retta fissa (la direttrice).

OSSERVAZIONE 2

Ricordiamo che le coniche che abbiamo descritto sono le sole curve che, una volta introdotto un riferimento cartesiano ortogonale sul piano, in geometria analitica, si possono esprimere con equazioni di secondo grado del tipo: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$; in dipendenza dai numeri reali coefficienti a, b, c, d, e, f che vi compaiono come coefficienti, si ha un cerchio o un'ellisse o una parabola o un'iperbole o una coppia di rette (anche coincidenti).

OSSERVAZIONE 3

Se ci domandiamo perché è importante conoscere le coniche, ricordiamoci che Galileo scoprirà, diciotto secoli dopo Apollonio, che la traiettoria di un proiettile soggetto alla forza di gravità è una parabola, e ancora dopo che Newton scoprirà che l'attrazione reciproca tra i corpi celesti fa sì che i pianeti circolino attorno al sole secondo traiettorie ellittiche.³

³ *XlaTangente* ha una sezione dedicata al tema delle coniche dove potete trovare molte [animazioni](#), buona visione!
(Ndr)