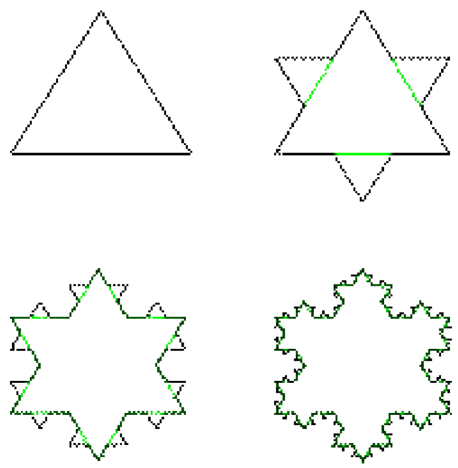
Frattali

Guardiamo l'immagine di una costa frastagliata e osserviamo come, su scala diversa, le irregolarità della costa si ripetono: quale modello di figura può essere utile per misurare la lunghezza della costa o la superficie di un'isola con una costa frastagliata?

Classe 4°C liceo scientifico Cologno Monzese A.S 2009/2010

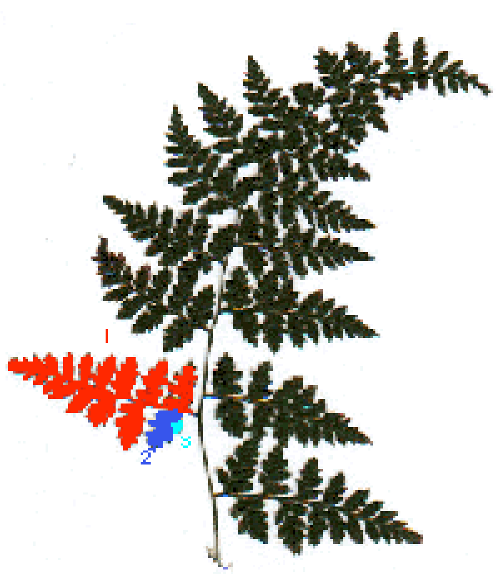
INTRODUZIONE

Quest'anno come classe 4C, a cui si sono aggiunti tre studenti di 5A, abbiamo partecipato a un progetto universitario riguardante lo studio dei frattali. I frattali sono figure geometriche caratterizzate dal ripetersi sino all'infinito di uno stesso motivo su scala sempre più ridotta.



Esempi di frattali possono essere trovati nella vita d'ogni giorno; durante una nevicata invernale, un occhio più esperto può cogliere come ogni singolo fiocco di neve abbia una struttura geometrica molto complessa, che può essere studiata nel campo dei frattali. Anche una felce può essere considerata un esempio di frattale.

Il fiocco di neve e la felce, come tanti altri esempi in natura, sono stati il punto di partenza del nostro lavoro.



Il problema iniziale, dal quale poi abbiamo ricavato le proprietà generali dei frattali, è stato calcolare perimetro e area di della costa della Groenlandia che ci ha portato a scoprire i frattali come modello per risolvere il problema. Per svolgere questo lavoro ci siamo divisi in cinque gruppi, ognuno dei quali partendo dagli stessi quesiti, ha portato a termine ragionamenti differenti, che evidenziano come il problema centrale possa essere risolto percorrendo strade diverse. Un modo per collaborare insieme e

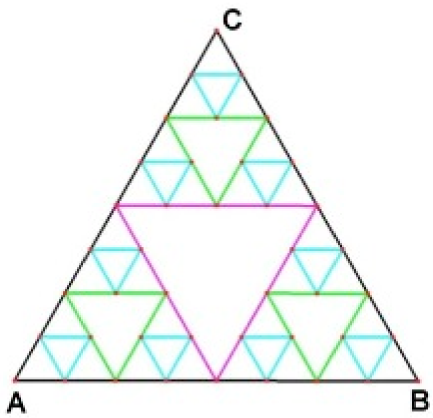
La felce può essere suddivisa in tanti triangoli, a loro volta costituiti da altri triangoli più piccoli, seguendo un numero infinito di iterazioni.

aggiornarci costantemente è stata l'apertura di un *forum* su *internet*, messo a disposizione dal ricercatore che ci ha seguito durante questo progetto.

SCOPERTA E STUDIO DEI FRATTALI

FIGURA 1

Abbiamo diviso il triangolo equilatero di partenza in quattro triangoli equilateri. Il numero di triangoli equilateri aumenta. Cancellando il triangolo al centro abbiamo creato una struttura simile alla felce. L'area totale della figura trovata misura i $\frac{3}{4}$ della figura intera e il perimetro i $\frac{3}{2}$.



$(3/2)^n$ è la relazione che permette di determinare il perimetro dopo n iterazioni.

$y = (3/2)^n$, essendo un'esponenziale, rappresenta una curva che aumenta sempre all'infinito e non ha asintoto verticale.

Chiamiamo il lato del primo triangolo nero "*l*" e andiamo a definire il perimetro (2*p*) di tutti gli altri triangoli:

1, nero) $2p = 3l$
2, fucsia) $2p = l/2 \cdot 9 = l \cdot 9/2$
3, verde) $2p = l/4 \cdot 27 = l \cdot 27/4$
4, celeste) $2p = l/8 \cdot 81 = l \cdot 81/8$

Possiamo cominciare a notare una relazione tra le frazioni che moltiplicano di volta in volta il lato "*l*".

Per comodità, chiamiamo "*z*" il perimetro 1, in modo da notare immediatamente come esso vari.

1) $2p = z$
2) $2p = z \cdot 3/2$
3) $2p = z \cdot 9/4$
4) $2p = z \cdot 27/8$

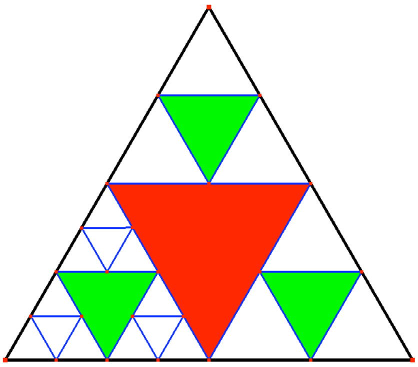
In questo modo si può facilmente notare che il perimetro iniziale è moltiplicato per un fattore $(3/2)^n$, con n numero naturale.

Il nostro ricercatore, Andrea Montoli, ci ha detto che la figura considerata rappresentava bene una struttura come quella della felce. In seguito ci ha posto alcuni quesiti:

Cosa succede all'area se considero un numero molto grande di iterazioni? Anche $(3/2)^n$ cresce, andando all'infinito al crescere n.

Questo cosa vi fa venire in mente riguardo al problema originario di trovare un modello per calcolare la lunghezza di una costa?

Abbiamo cercato di determinare meglio l'area della figura che rimaneva eliminando il triangolo rosso (v. figura successiva) da quello più interno (entrambi equilateri). Il rapporto che abbiamo trovato è sempre $\frac{3}{4}$ di quello di precedente.



-Area triangolo grande senza quello rosso è $\frac{3}{4}$ di quello grande.

-Area triangolo grande senza il rosso e i verdi è $(\frac{3}{4})^2$ di quello grande.

Dal rapporto area e perimetro che abbiamo ottenuto

$$2p = (\tfrac{3}{2})^n\, l \qquad \text{e} \qquad A = (\tfrac{3}{4})^n\, l,$$

(dove "*l*" è il lato di partenza del triangolo grande). Quindi il perimetro va all'infinito, l'area va a zero.

Abbiamo anche pensato che forse i frattali sono figure a metà tra quelle a una dimensione, quindi le rette, e a due dimensioni, in quanto il loro perimetro tende all'infinito e l'area tende a zero. È probabile quindi che queste figure non corrispondano alle normali regole della geometria a cui siamo abituati.

RISPOSTA DEL RICERCATORE:

Le osservazioni sul perimetro e l'area della vostra figura sono esatte: il perimetro va all'infinito, l'area va a zero. Quindi questa figura effettivamente non si presta a modellizzare un problema come la misura della lunghezza di una costa frastagliata. Il suggerimento che vi do, quindi, è di cercare altre figure di tipo frattale che invece permettano di fare questo lavoro (altri gruppi hanno già lavorato su figure diverse, ottenendo risultati che fanno sperare che sia possibile).

Soprattutto, però, vorrei sottolineare le vostre conclusioni, perchè scrivete delle cose estremamente interessanti; le riporto:

"**Conclusione**: figure frattali si trovano a metà tra quelle a una sola dimensione (retta) e quelle bidimensionali (dotate di area).

È probabile che tali figure non corrispondano alle normali regole della geometria a cui siamo abituati. "

Avete centrato perfettamente il problema che si ha quando si lavora con figure frattali: la loro dimensione non è semplicemente 1 o 2, ma a volte sembra essere una "dimensione intermedia", che non soddisfa le usuali regole della geometria. Uno dei possibili scopi della seconda parte del progetto sarà cercare di dare un significato e una definizione precisa alla "dimensione frattale". Potete iniziare a pensare a questo problema, poi ne riparleremo meglio durante il mio prossimo incontro con la vostra classe, per ora, però, vi consiglio di provare a costruire altre figure (o semplicemente a modificare la costruzione della vostra) in modo da cercare di modellizzare il problema originario sulla lunghezza delle coste (o l'area di un'isola.

FIGURA 2

Ecco ora un esempio di figura frattale con perimetro finito: ogni volta che prendo i punti medi dei lati e li unisco alla linea superiore, ciò che perdo di perimetro lo riguadagno, perché considero ogni volta solo la parte più esterna, come se rappresentasse una costa frastagliata. Segue che per qualunque numero *n* di iterazioni il perimetro rimane costante.

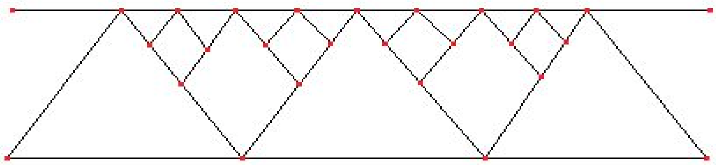
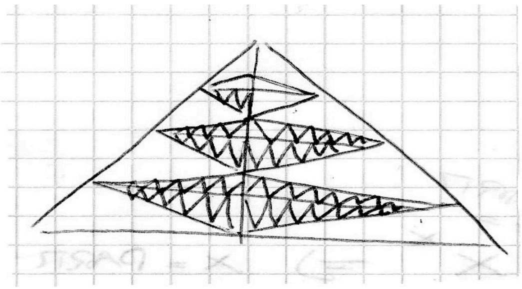


FIGURA 3

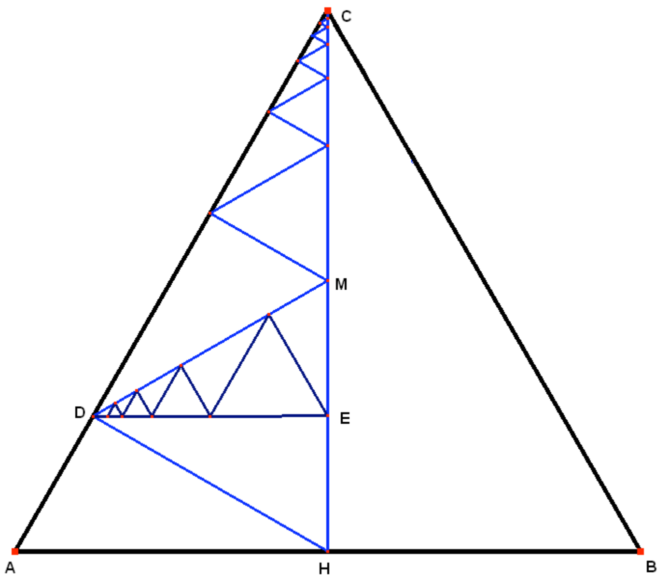


Abbiamo iniziato disegnando una felce e riducendola successivamente a un triangolo equilatero e dividendo quest'ultimo in tante piccole ''foglie'' triangolari sempre più piccole, seguendo il modello della pianta in questione (le foglie piccole risultano simili a quella di partenza). Procedendo all'inverso abbiamo detto che il perimetro della ''foglia'' più piccola è uguale al rapporto tra il perimetro della figura totale e il numero dei triangoli più piccoli che lo compongono. Abbiamo denominato quest'ultimo numero (finito) "*x*".

Osservando poi la ripetizione del motivo per semplificare ulteriormente il nostro ragionamento abbiamo provato a fare un esempio numerico: se il triangolo totale fosse diviso all'inizio in altri sei triangolini, vorrebbe dire che ognuno di essi sarebbe diviso in altri sei triangolini ancora più piccoli e così via. Questo numero sei corrisponde alla nostra "*x*",che assume quindi un valore di costante e l'abbiamo rinominato "*n*". Si è poi notato che il numero dei triangoli aumentava via via in modo esponenziale: siamo giunti allora alla conclusione che il numero totale delle foglie è dato da n^k (iterazioni).

Abbiamo inoltre cercato un modo per calcolare il perimetro e l'area della foglia minima, arrivando alla proporzione:

Area(triang. piccolo) : Perimetro(triang. piccolo) = Area(triang. tot) : Perimetro(triang. tot)



Tuttavia, nell'incontro successivo, ci siamo accorti che la figura che avevamo preso in considerazione per i nostri calcoli precedenti era ''sbagliata'', perché non c'era un criterio con cui costruire l'iterazione, così come la relazione di proporzionalità, perché il perimetro dovrebbe essere al quadrato. Abbiamo pensato di cambiare figura e usare un triangolo aureo (ovvero un triangolo isoscele con angoli di 72° alla base e 36° al vertice), che assomigliava di più all'idea di una felce; tuttavia, abbiamo deciso di insistere sulla nostra figura e soffermarci su questo aspetto, alla ricerca di un criterio.

Il nostro gruppo si è adoperato per fare un procedimento geometrico in grado di dimostrare la validità del criterio trovato (cioè i triangoli più piccoli costruiti sui punti medi sono equilateri).

-Abbiamo un triangolo equilatero di lato *l*, tracciamo l'altezza relativa alla base che sappiamo essere $\sqrt{\frac{3}{2}}\,l$;

-Dal punto H tracciamo la perpendicolare al lato AC: si viene così a formare il triangolo AHD rettangolo per costruzione;

-Di questo triangolo conosciamo AH=$\frac{l}{2}$, AD=$\frac{l}{4}$ perché è metà base di un triangolo equilatero di lato $\frac{l}{2}$ (in quanto gli angoli del triangolo AHD sono 30°; 60°; 90°);

-HD è $\sqrt{\frac{3}{4}}\,l$,per il teorema di Pitagora. Quindi il triangolo HDE è metà di un triangolo equilatero, in quanto sappiamo che l'angolo HDE è di 30°(angoli alterni interni), che l'angolo DHE è di 60° (differenza degli angoli CHA e DHA), e che l'angolo HED è di 90° (per somma degli altri andoli del triangolo HDE);

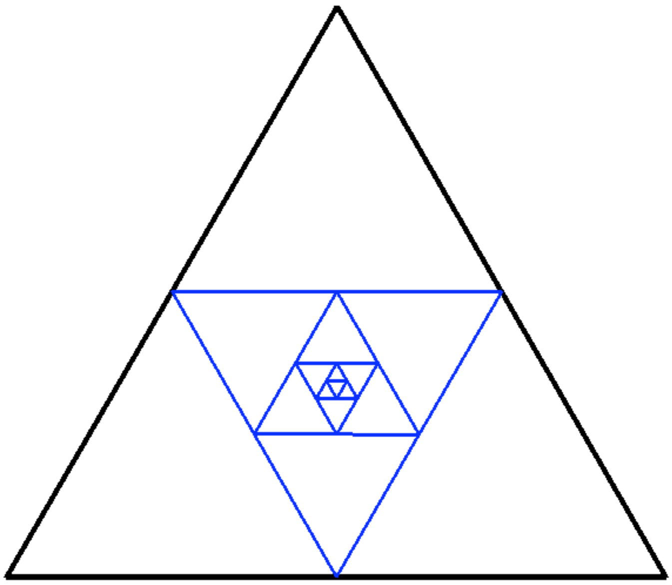
-Essendo quindi HED metà di un triangolo equilatero, possiamo dire che HE è la metà di DH $\sqrt{\frac{3}{4}}$ *l* e quindi è pari $\sqrt{\frac{3}{8}}\,l$;

-Segue che HM, che è uguale a 2HE, è uguale a DH;

-In conclusione, possiamo affermare che il triangolo DMH è equilatero (con lato metà dell'altezza originaria CH).

Dopo aver chiarito questo aspetto, c'è stato un nuovo tentativo di vedere l'andamento dell'area e del perimetro: facendo degli esempi numerici abbiamo notato che nel primo caso i valori si stabilizzavano via via che si procedeva con le iterazioni, mentre nel secondo i valori tendevano all'infinito.

FIGURA 4



La nostra idea era trovare un rapporto costante tra le varie figure, in modo da potere calcolare il perimetro totale dei triangoli.

Per comodità chiamiamo il lato del triangolo più grande "*a*" ed eseguiamo una prima iterazione. Avremo così due triangoli, uno di perimetro 3a e uno di perimetro (3/2)*a*. Il loro rapporto, *k*, è 1/2 (perimetro piccolo/perimetro grande).

I triangoli quindi decrescono in rapporto 1/2 rispetto al triangolo precedente e il perimetro totale sarà:

$3a + (1/2)\ 3a + (1/2)(1/2)3a + (1/2)(1/2)(1/2)3a$ + ecc...

In generale: $k^0 \cdot n + k^1 \cdot n + k^2 \cdot n + ... + k^x \cdot n$

(dove "*n*" è il perimetro del triangolo di partenza, *k* la costante e *x* il numero di iterazioni che si vogliono eseguire). Questo numero crescerà all'infinito, anche se sempre meno velocemente.

Abbiamo poi provato a trovare una relazione tra i perimetri totali partendo da "*n*" diversi, ma ci siamo accorti che questo lavoro non era utile al nostro scopo.

Poi, non sicuri che il perimetro del triangolo crescesse all'infinito, l'abbiamo esaminato più nel dettaglio, osservando il comportamento del perimetro dopo molte iterazioni:

$x = p + 1/2p = 3/2p$

$x = 2p + 1/2p + 1/4p = 7/4p$

$x = 10p + 1/2p + 1/4p + 1/8p + 1/16p + 1/32p + 1/64p + 1/128p + 1/256p + 1/512p + 1/1024p = 2047/1024p$

In seguito a questi calcoli abbiamo trovato:

$2p_{tot} = (\ (1/k)^{(x+1)} - 1\ )\ k^x$

Poiché:

2047/1024 è quasi 2 e più precisamente è $(2 \cdot D - 1)/D$ [*D* sta ad indicare il denominatore]

$D = 1/k^x$ [*k* è il rapporto tra i perimetri fra un'iterazione e l'altra]

$2D = 1/k^{(x+1)}$

Quindi:

$[1/k^{(x+1)} - 1]/(1/k^x) = (\ (1/k)^{(x+1)} - 1\ )\ k^x$

Ecco che abbiamo ritrovato la nostra formula; l'ultima considerazione da fare su questa formula è che proseguendo con varie iterazioni non cresce all'infinito, anzi osserviamo che negli esempi studiati tende al reciproco di *k* (nel nostro caso 1/2)

es:

$k = 1/2 \qquad ((1/k)^{x+1} - 1)\, k^x \longrightarrow 2$

$k = 1/3 \qquad ((1/k)^{x+1} - 1)\, k^x \longrightarrow 3$

Nel nostro caso ($k = 1/2$) il risultato tende a $2 \cdot 2p$, quindi non aumenta all'infinito.

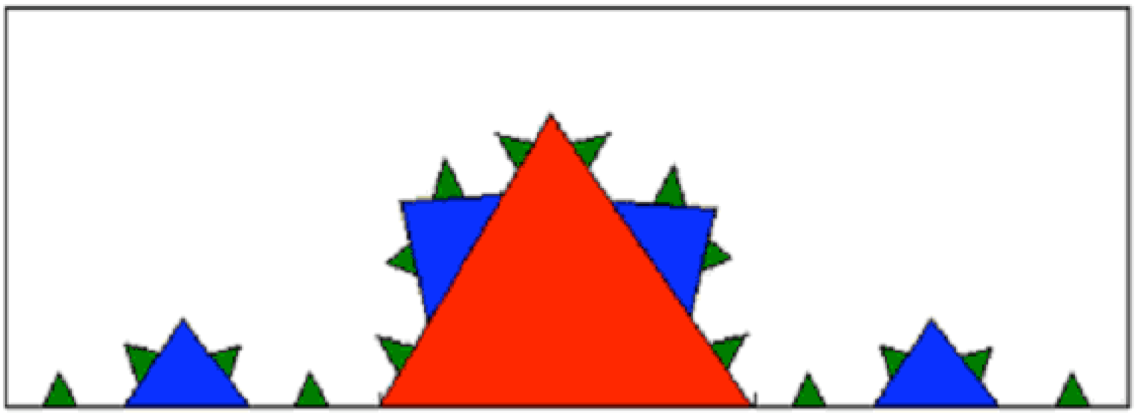
Ci siamo così chiesti che relazione ci fosse tra il rapporto e la figura frattale studiando altre figure, un quadrato e un esagono (scelti per la comodità dei calcoli):

	Lato prima iterazione	Perimetro prima iterazione
Triangolo	1	$3/2$
Quadrato	$\sqrt{2}/2$	$2\sqrt{2}$
Esagono	$\sqrt{3}/2$	$3\sqrt{3}$

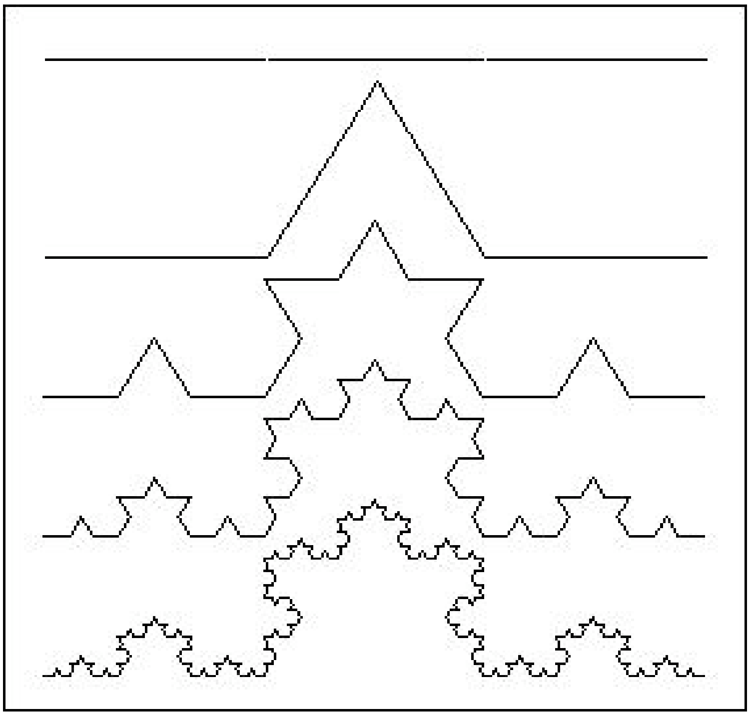
Non siamo però riusciti a trovare una relazione che colleghi il rapporto alla figura. Non siamo riusciti neanche a fare il ragionamento inverso: per esempio un rapporto di 1/3 che figura rappresenta? se rappresentasse una figura tridimensionale non riusciremmo a lavorarci sopra con le nostre conoscenze matematiche.

FIGURA 5

Abbiamo iniziato ad analizzare una figura per trovare un modello che ci consentisse di studiare anche l'area e che allo stesso tempo rappresentasse meglio una costa.



Partendo da una linea retta, approssimazione massima di una costa (il perimetro, 2*p,* della costa alla prima iterazione, corrisponde al lato lungo 1 del rettangolo e *A* è l'area del rettangolo) abbiamo aggiunto mano a mano triangoli equilateri sempre più piccoli, costruiti dividendo in tre tutti i lati congruenti e costruendo il triangolo nel segmento centrale. Ad ogni iterazione corrisponde un numero crescente di triangoli equilateri congruenti più piccoli (nella figura la prima iterazione è quella rossa, la seconda quella blu e la terza quella verde).

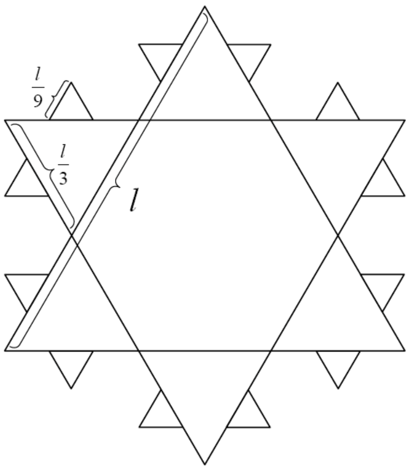


Questo modello dovrebbe poter rappresentare bene una costa perchè a ogni iterazione il perimetro aumenta e l'area diminuisce.

Abbiamo quindi provato a calcolare il perimetro della nuova figura, iterazione dopo iterazione:

$2p = (4/3)^n \cdot l$ (dove *n* è il numero di iterazioni). Questo perimetro quindi aumenta all'infinito, sempre più ad ogni iterazione.

FIGURA 6



Ci siamo concentrati sull'immagine di un triangolo equilatero, sviluppandola in modo da avere un'immagine frattale. Dopo aver chiamato "*l*" il lato del triangolo iniziale, abbiamo cercato di capire come varia il perimetro della figura che si va a formare.

Andiamo a definire il perimetro (P) di ogni figura:

1° passo, triangolo: $P_1 = l \cdot 3$

2° passo, stella a 6 punte: $P_2 = \frac{l}{3} \cdot 12 = 4l = \frac{4}{3} P_1$

3° passo, fiocco di neve: $P_3 = \frac{l}{9} \cdot 48 = \frac{16}{3} l = \frac{16}{9} P_1 = \frac{4}{3} P_2$

Effettuando i calcoli, abbiamo notato che il perimetro di ciascuna figura è uguale al perimetro della figura precedente moltiplicato per un fattore costante 4/3. Il perimetro di ogni figura quindi può essere espresso tramite la formula generale.

$$P = \left(\frac{4}{3}\right)^n P_1 \qquad \text{con } n \in N$$

In questo modo il perimetro tra una figura e l'altra aumenta in modo esponenziale. Infatti il rapporto tra un perimetro e quello successivo aumenta sempre di più.

Questo vuol dire che non possiamo arrivare ad un punto in cui il perimetro che troviamo sia una buona approssimazione del successivo, perché la differenza tra di essi è troppo grande per essere trascurata.

Siamo quindi costretti a considerare una nuova figura per studiare come varia il perimetro. Ad ogni modo, questa immagine offre buoni spunti per lo studio dell'area.

Vediamo come si sviluppa:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$
$$A_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{l}{3}\right) \cdot 3 + \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{12} l^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$
$$A_3 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{l}{9}\right) \cdot 12 + \frac{\sqrt{3}}{12} l^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{27} l^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} l^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

Proviamo a riscriverle in modo diverso:

$$A_1 = \sqrt{3} \cdot l^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$$
$$A_2 = \sqrt{3} \cdot l^2 \cdot \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)$$
$$A_3 = \sqrt{3} \cdot l^2 \cdot \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)$$

Innanzitutto notiamo che tutte le aree hanno un fattore comune $\sqrt{3} \cdot l^2$. Inoltre, passando da un'iterazione all'altra, il fattore posto fra parentesi aumenta sempre meno velocemente, ma in un modo che riusciamo a prevedere. Abbiamo dunque trovato una figura il cui perimetro è approssimabile dopo un numero sufficiente di iterazioni.

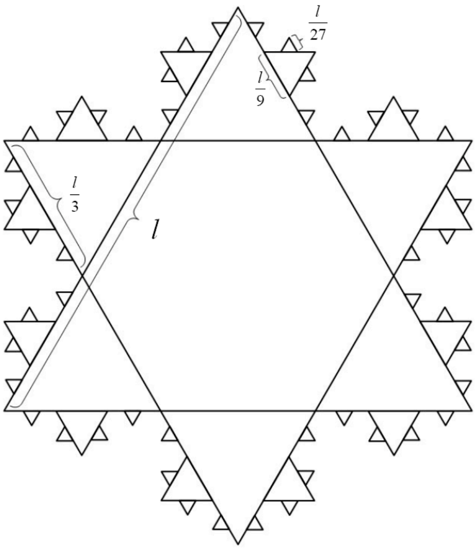
Ricapitoliamo le conclusioni tratte nell'analisi precedente, cominciando dal "fiocco di neve":

- è ormai certo che il perimetro di un'iterazione è uguale a 4/3 del perimetro dell'iterazione precedente, quindi $P_n = (4/3)^{n-1} P_1$;

- il perimetro aumenta in modo esponenziale, quindi questa figura non sembra essere adatta a rappresentare un modello di costa;
- da un'iterazione a quella successiva, l'area aumenta di un fattore sempre più piccolo, che sembrerebbe essere imprevedibile;
- è comunque possibile affermare con certezza che l'area, contrariamente al perimetro, aumenta sempre di meno, e le parti che si vanno ad aggiungere diventano piccole sufficientemente in fretta da non superare un certo valore; questa figura può rappresentare realisticamente la superficie di un'isola;

AREA DEL FIOCCO DI NEVE

Procediamo adesso al calcolo dell'area con qualche correzione; innanzitutto aggiungiamo un'iterazione al fiocco di neve, in modo da poter trarre delle conclusioni più precise.



Come abbiamo visto in precedenza, l'area in funzione del lato può essere così descritta:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l \qquad A_1 = \frac{\sqrt{3}}{2^2 3^0} l^2$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{3} \right) \cdot 3 + A_1 \qquad A_2 = \left(\frac{2^0 3^1 \sqrt{3}}{2^2 3^2} l^2 \right) + A_1$$

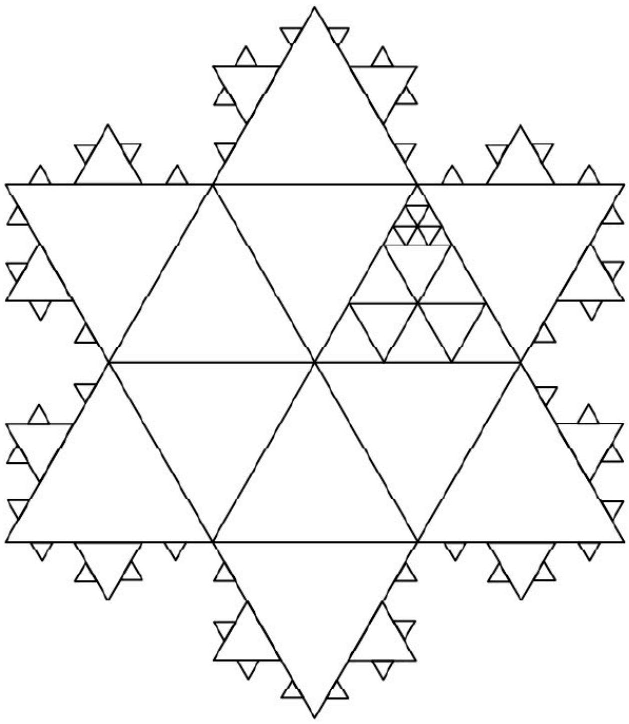
$$A_3 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{9} \right) \cdot 12 + A_2 \qquad A_3 = \left(\frac{2^2 3^1 \sqrt{3}}{2^2 3^4} l^2 \right) + A_2$$

$$A_4 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l}{27} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{l}{27} \right) \cdot 48 + A_3 \qquad A_4 = \left(\frac{2^4 3^1 \sqrt{3}}{2^2 3^6} l^2 \right) + A_3$$

Questa volta è possibile notare un certo legame tra le aree: infatti il numeratore della frazione fra parentesi aumenta sempre di un fattore 2^{2n} , mentre il denominatore aumenta sempre di 3^{2n}. Sembra quindi esserci un fattore costante uguale a $(4/9)^n$ che lega gli incrementi di area da un'iterazione alla successiva.

Prima non si riusciva a notare questo legame perché, semplificando, scompariva qualche fattore.

Proviamo a calcolare l'area utilizzando come riferimento un triangolo piccolo e guardando quante volte sta in ogni figura.



$$A_1 = A$$
$$A_2 = \frac{A}{9} \cdot 12 = \frac{4}{3} A$$
$$A_3 = \frac{A}{81} \cdot 120 = \frac{40}{27} A$$
$$A_4 = \frac{A}{729} \cdot 1128 = \frac{376}{243} A$$
$$A_5 = \frac{A}{6561} \cdot 10344 = \frac{3448}{2187} A$$

$$A_1 = A \cdot 1$$
$$A_2 = A \cdot 1,\bar{3} \qquad + 0,33...$$
$$A_3 = A \cdot 1,\overline{481} \qquad + 0,15...$$
$$A_4 = A \cdot 1,54... \qquad + 0,06...$$
$$A_5 = A \cdot 1,57... \qquad + 0,03...$$

Da questi calcoli emerge un dato molto importante, e cioè che l'area iniziale viene moltiplicata per un fattore che aumenta di una quantità sempre più piccola. In particolare questo "scarto" è sempre la metà (circa) di quello precedente. Con ogni probabilità, dunque, il fattore che moltiplica l'area iniziale arriverà a un punto in cui aumenterà di talmente poco che la variazione sarà irrilevante.

Questo significa che dopo infinite iterazioni il fattore tenderà a un numero preciso.

Per cercare di capire qual è questo numero utilizziamo un metodo leggermente diverso dai precedenti. L'area sarà sempre espressa in funzione dell'area iniziale, ma le porzioni di area che si aggiungono di volta in volta resteranno separate.

$$A_1 = A_1 \qquad\qquad A_1 = A_1$$

$$A_2 = A_1 + \frac{1}{3}A_1 \qquad\qquad A_2 = A_1\left(1 + \frac{1}{3}\right)$$

$$A_3 = A_1 + \frac{1}{3}A_1 + \frac{4}{27}A_1 \qquad\qquad A_3 = A_1\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27}\right)$$

$$A_4 = A_1 + \frac{1}{3}A_1 + \frac{4}{27}A_1 + \frac{16}{243}A_1 \qquad\qquad A_4 = A_1\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243}\right)$$

Analizziamo più a fondo A_4.

$$A_4 = A_1\left(1 + \frac{2^0}{3^1} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^4}{3^5}\right)$$

$$A_4 = A_1\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2^0}{3^0} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^4}{3^4}\right)\right]$$

$$A_4 = A_1\left[1 + \frac{1}{3}\left(\frac{4^0}{9^0} + \frac{4^1}{9^1} + \frac{4^2}{9^2}\right)\right]$$

Adesso è molto chiaro il modo in cui aumenta l'area, e possiamo determinare l'area del fiocco di neve dopo infinite iterazioni attraverso la formula generale

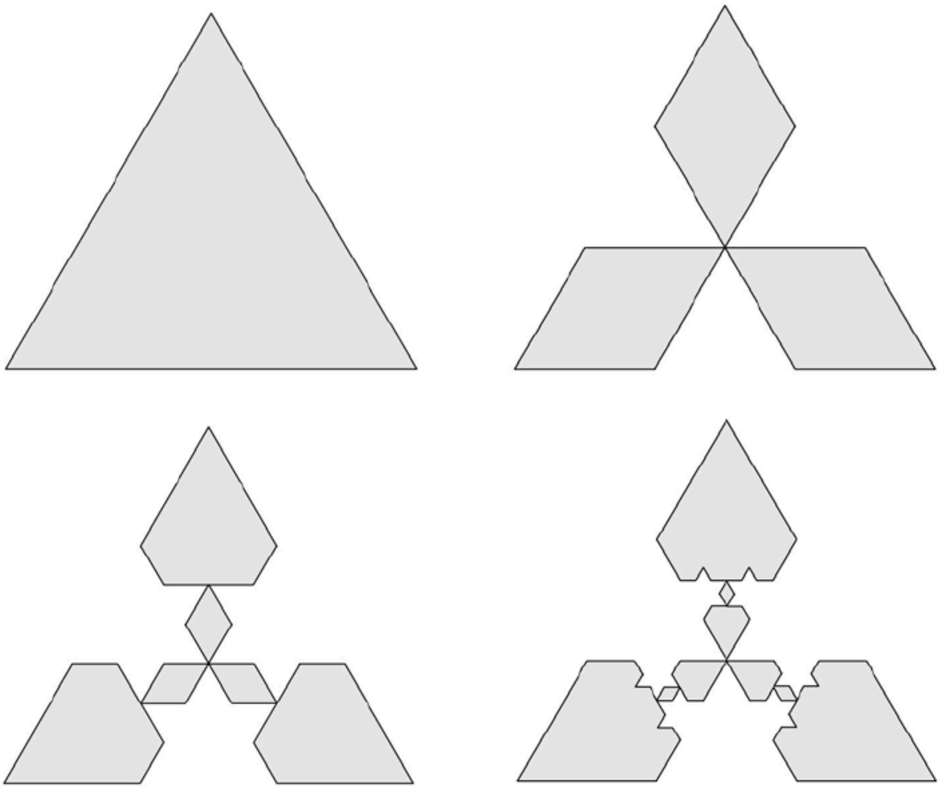
$$A_n = A_1\left[1 + \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^i\right]$$

Eseguendo alcuni calcoli possiamo empiricamente verificare che il valore che moltiplica A_1 non supera mai 1,6. Possiamo quindi affermare che l'area del fiocco di neve dopo infinite iterazioni vale

$$A = \frac{8}{5}A_1$$

FIGURA 7

Prendiamo in esame un’altra figura, che chiamiamo anti-fiocco di neve (perché invece di aggiungere triangoli, li sottraiamo) e calcoliamone il perimetro:



$$P_1 = 3l$$

$$P_2 = \frac{l}{3} \cdot 12 = 4l$$

$$P_3 = \frac{l}{3} \cdot 6 + \frac{l}{9} \cdot 24 = \frac{14}{3} l$$

$$P_4 = \frac{l}{3} \cdot 6 + \frac{l}{9} \cdot 12 + \frac{l}{27} \cdot 48 = \frac{46}{9} l$$

Analizzando questi calcoli, possiamo notare che non c’è un rapporto costante tra il perimetro precedente e il successivo, ma non è da escludere il fatto che si possa trovare una funzione più complessa (per verificarlo servirebbe un numero più elevato di iterazioni)

Per calcolare l’area dell’anti-fiocco di neve, utilizziamo un procedimento intuitivo.

Scomponiamo l’area dopo infinite iterazioni in questo modo

$$A = \frac{8}{5} A_1 = \left(\frac{5}{5} + \frac{3}{5} \right) A_1 = A_1 + \frac{3}{5} A_1$$

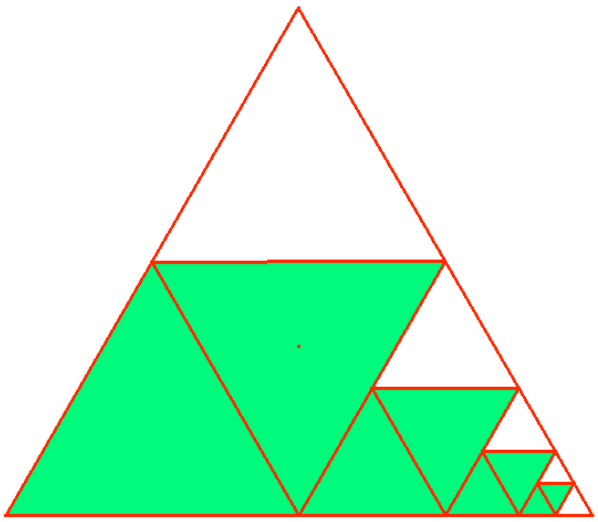
In questa forma si può notare che all'area del triangolo iniziale viene aggiunta una frazione di area che corrisponde alla costruzione frattale intorno al triangolo iniziale.

Mentre nel fiocco di neve questa parte di area si aggiunge al triangolo, nell'anti-fiocco di neve (v. figura) essa viene sottratta. Quindi otteniamo che l'area dell'anti-fiocco di neve dopo infinite iterazioni vale

$$A = A_1 - \frac{3}{5} A_1 = \frac{2}{5} A_1$$

FIGURA 8

Abbiamo iniziato a dividere un triangolo equilatero in triangoli congruenti anch'essi equilateri e a calcolare il perimetro della figura ottenuta che è quella in verde. Ad ogni iterazione abbiamo eliminato il triangolo più in alto a destra e considerato il perimetro della figura che rimaneva che è evidenziato in rosso



$2p_0 = 3l$

$2p_1 = 5/2l$

$2p_2 = 11/4l$

$2p_3 = 23/8l$

$2p_4 = 35/16l$

…

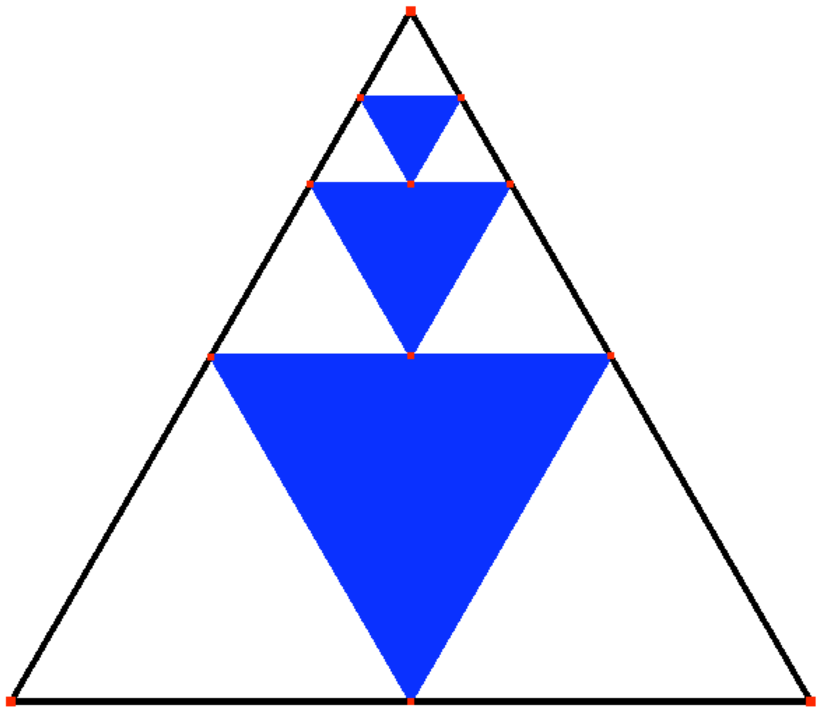
Tra i perimetri ottenuti non siamo riusciti a trovare un rapporto fisso quindi abbiamo abbandonato lo studio di questa figura. In seguito abbiamo deciso di fare un altro tentativo per vedere se potevamo trovare qualcosa di interessante; abbiamo quindi ricalcolato il perimetro esprimendo i risultati in numeri decimali e non frazioni, supponendo che il lato *l* del triangolo di partenza fosse 1:

$2p_0 = 3$
$2p_1 = 2{,}5$
$2p_2 = 2{,}75$
$2p_3 = 2{,}875$
$2p_4 = 2{,}9375$
$2p_5 = 2{,}966875$
$2p_6 = 2{,}984375$
$2p_7 = 2{,}992187$
$2p_8 = 2{,}9960$
$2p_9 = 2{,}9980$

$2p_{10} = 2{,}9990$
$2p_{11} = 2{,}9995$
$2p_{12} = 2{,}99975$
$2p_{13} = 2{,}9998$
$2p_{14} = 2{,}99993$
…

Ci siamo accorti che, dopo la una diminuzione del perimetro alla prima iterazione, il perimetro continua a crescere di un numero molto piccolo ogni volta e che si stabilizzano una serie di 9 dopo la virgola.

FIGURA 9



Continuando a lavorare sulla figura 8, siamo arrivati ad ottenere un'altra figura secondo noi interessante, della quale abbiamo cominciato studiare area e perimetro. Abbiamo infatti calcolato il perimetro della parte bianca togliendo ogni volta il triangolo centrale; al primo passaggio abbiamo ottenuto un perimetro di $3l$

$2p_0 = 3l$
$2p_1 = 3l + 3/2l$
$2p_2 = 3l + 3/2l + 3/4l$
$2p_3 = 3l + 3/2l + 3/4l + 3/8l$
$2p_4 = 3l + 3/2l + 3/4l + 3/8l + 3/16l$
$2p_5 = 3l + 3/2l + 3/4l + 3/8l + 3/16l + 3/32l$
…

a ogni passaggio abbiamo tolto un triangolino sempre più piccolo tra quelli evidenziati in blu.

Ci siamo accorti che la differenza tra i perimetri calcolati in due passi successivi è di $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

con n che aumenta sempre di 1. Una cosa molto simile accade all'area, ma questa volta si sottrae qualcosa: calcolando l'area dei triangoli bianchi abbiamo ottenuto

$A_0 = l \times \sqrt{(3/2)} \times 1/2$
$A_1 = l \times l/2 \times 1/2 - l/2 \times l/4 \times 1/2$
$A_2 = l \times l/2 \times 1/2 - l/2 \times l/4 \times 1/2 - l/4 \times l/8 \times 1/2$
$A_3 = l \times l/2 \times 1/2 - l/2 \times l/4 \times 1/2 - l/4 \times l/8 \times 1/2 - l/8 \times l/16 \times 1/2$
$A_4 = l \times l/2 \times 1/2 - l/2 \times l/4 \times 1/2 - l/4 \times l/8 \times 1/2 - l/8 \times l/16 \times 1/2 - l/16 \times l/32 \times 1/2$

la differenza tra l'area di una figura e quella precedente è di $(1/4)^n$ con n intero positivo. Quindi abbiamo osservato che la differenza tra un perimetro di una figura e quello precedente continua a essere sempre più piccolo, quindi arriverà a essere talmente piccolo da poter essere trascurato.

Risposta del ricercatore:

La figura che avete considerato mi sembra molto interessante, e i vostri calcoli sul perimetro e sull'area sono corretti.

A questo punto vi chiedo: cosa succede (sia al perimetro che all'area) quando n *cresce? C'è bisogno di fermare la nostra approssimazione ad un certo valore di* n *(se sì, quale?) o possiamo lasciare che* n *cresca all'infinito? In quest'ultima ipotesi, si ottiene qualche risultato interessante?*

Riassumendo: visto che il nostro obiettivo è capire cosa succede iterando il procedimento costruttivo della figura all'infinito, secondo voi quali sono il perimetro e l'area della vostra figura, iterando all'infinito?

Abbiamo quindi cercato di trovare quell'esponente di n secondo il quale la differenza tra un perimetro di una figura e quello precedente diventa sempre più piccola, fino a stabilizzarsi.

Siamo partiti dai perimetri della parte bianca ricavati ogni volta togliendo il triangolo centrale (quello blu) e ne abbiamo calcolato il valore, aggiungendo ogni volta 3/2.

$2p_0 = 3l$			3
$2p_1 = 3l$	$+ 3/2l$	$= 9/2l$	4,5
$2p_2 = 9/2l$	$+ 3/4l$	$= 21/4l$	5,25
$2p_3 = 3l \quad + 3/2l$	$+ 3/4l \; + 3/8l$	$= 45/8l$	5,625
$2p_4 = 45/8l$	$+ 3/16l$	$= 93/16l$	5,8125
$2p_5 = 93/16l$	$+ 3/32l$	$= 189/32l$	5,90625
$2p_6 = 189/32l$	$+ 3/64l$	$= 381/64l$	5,953125
$2p_7 = 381/64l$	$+ 3/128l$	$= 765/128l$	5,9765625
$2p_8 = 765/128l$	$+ 3/256l$	$= 1533/256l$	5,98828125
$2p_9 = 1533/256l$	$+ 3/512l$	$= 3069/512l$	5,994140625
$2p_{10} = 3069/512l$	$+ 3/1024l$	$= 6141/1024l$	5,997070313
$2p_{11} = 6141/1024l$	$+ 3/2048l$	$= 12301/2048l$	6,006347656

$2p_{12}$ = 12301/2048*l*	+ 3/4096*l*	= 24605/4096*l*	6,007080078
$2p_{13}$ = 24605/4096*l*	+ 3/8192*l*	= 49213/8192*l*	6,007446289
$2p_{14}$ = 49213/8192*l*	+ 3/16384*l*	= 98429/16384*l*	6,007629395
$2p_{15}$ = 98429/16384*l*	+ 3/32768*l*	= 196861/32768*l*	6,007720947
$2p_{16}$ = 196861/32768*l*	+ 3/65536*l*	= 393725/65536*l*	6,007766724
$2p_{17}$ = 393725/65536*l*	+ 3/131072*l*	= 7879450/131072*l*	6,007789612
$2p_{18}$ = 7879450/131072*l*	+ 3/262144*l*	= 15758900/262144*l*	6,007801056
$2p_{19}$ = 15758900/262144*l*	+ 3/524288*l*	= 31517800/524288*l*	6,007806778
$2p_{20}$ = 31517800/524288*l*	+ 3/1048576	= 63135600/1048576*l*	6,00780963

Abbiamo osservato che da n = 11 il valore inizia a stabilizzarsi, in quanto le prime 3, 4 cifre del perimetro totale sono le stesse, quindi ci stiamo avvicinando al valore di n per il quale il perimetro della figura rimane costante.

Quindi questa figura frattale si presta bene per il calcolo del perimetro.

STUDIO DIMENSIONE FRATTALE

Durante un incontro uno dei nostri gruppi, lavorando sul triangolo di Sierpinski (il ricercatore ci ha poi rivelato il nome della figura che stavamo studiando!) si è accorto di una caratteristica fondamentale dei frattali: in questa figura il perimetro tendeva ad aumentare sempre di più mentre l'area diminuiva, fino a tendere a 0.

Il triangolo sembrava degenerare in una linea retta.

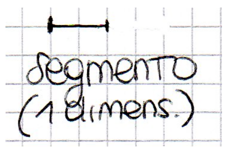
Ciò che distingue queste due figure è la dimensione. Il triangolo è un elemento geometrico a due dimensioni, mentre la retta ne ha una sola. Non riuscivamo però a definire la dimensione del triangolo di Sierpinski: questa figura non corrispondeva alle normali regole della geometria a cui siamo abituati.

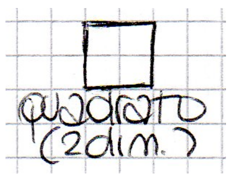
Siamo quindi giunti alla conclusione che le figure frattali possono avere dimensione compresa tra 1 e 2.

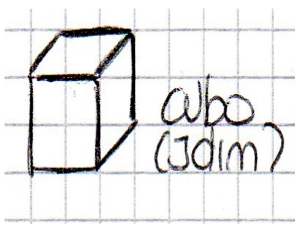
Su suggerimento del ricercatore abbiamo cercato un altro punto di vista per calcolare la dimensione, diverso da quello del numero di coordinate che ci servono per rappresentare la figura stessa.

Abbiamo quindi cercato di ricavare una formula per comprendere meglio il problema della dimensione di queste figure nuove, partendo da ciò che ci era già noto.

Siamo partiti studiando "singoletti", ovvero unità, di figure semplici da analizzare. Abbiamo preso un segmento, un quadrato e un cubo, di cui conosciamo le rispettive dimensioni.

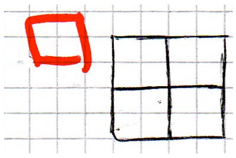




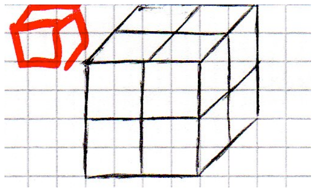


Successivamente abbiamo raddoppiato la lunghezza di ogni lato di ciascun singoletto, creando figure composte da più singoletti.

1 dimensione



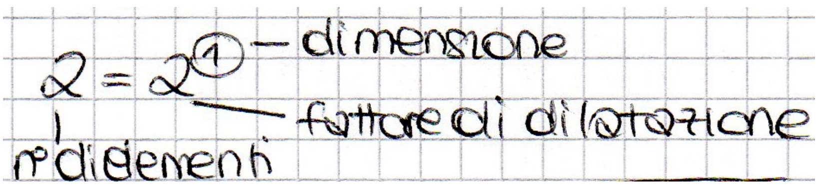
2 dimensioni



3 dimensioni

Si può notare come il numero di copie del singoletto sia uguale al fattore di dilatazione (in questo caso pari a 2, poiché abbiamo raddoppiato ogni lato) elevato alla dimensione della suddetta figura.

Quindi, prendendo il primo caso:



Ripetendo lo stesso procedimento con le altre figure da noi analizzate, e avendo confermato la correttezza dei passaggi, abbiamo ricavato che:

n(copie dell'oggetto) = t(fattore di dilatazione)$^{d\text{(dimensione)}}$

Quindi risolvendo l'equazione si ricava:

$$\boldsymbol{d = \log_t n}$$

Riportiamo ora altri approcci seguiti, alcuni dei quali che contengono errori, che però sono stati poi utili nella discussione per capire aspetti "nascosti" della nuova definizione di dimensione.

Per cercare di capire qual è la dimensione di un frattale abbiamo provato a ripercorrere lo stesso procedimento che ci permette di definire la secodna dimensione. Un quadrato ha dimensione 2 perché un quadrato di lato l contiene l^2 quadrati di lato l. Vale quindi la formula l^2 = figura finale. Nel caso del quadrato diventa $3^2 = 9$. Tradotta a parole vuol dire che nel quadrato (iterazione successiva) il lato (iterazione precedente) ci sta lxl volte. Questa definizione deve valere allo stesso modo per la costruzione di un frattale, partendo sempre da un lato l. Questa volta però la figura finale non è l^2 come accade nel quadrato, ma è $\frac{4}{3}l$. Sostituendo nella formula precedente otteniamo $d = \log_3 4$ ➔ $d = 1{,}2618595\ldots$

Così abbiamo scoperto che il fiocco di neve ha dimensione uguale a 1,2618595.

Questo è quello che accade alla prima iterazione.

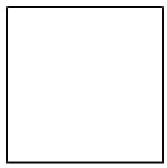
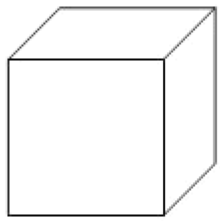
Analizzando le successive iterazioni abbiamo scoperto che la dimensione della figura cambia:

$$d_2 = 1{,}523719...$$

$$d_3 = 1{,}7855785...$$

$$d_4 = 2{,}047438...$$

TABELLA RIASSUNTIVA DIMENSIONE FRATTALE

OPERAZIONE	ITERAZIONE 1	ITERAZIONE 2	ITERAZIONE 3
COSTRUZIONE QUADRATO	d = 1	 d = 2	 d = 3
COSTRUZIONE FRATTALE (curva di Koch)	d = 1	 d = 1,26...	 d = 1,52...

Osservando questi risultati, innanzitutto notiamo che sono diversi tra loro (quindi la dimensione dovrebbe cambiare); inoltre siamo rimasti notevolmente sorpresi constatando che il valore della dimensione alla quinta iterazione (d4) supera il 2. Noi davamo per certo che la dimensione frattale fosse sempre compresa tra 1 e 2. Ma siamo rimasti ancora più sorpresi quando abbiamo calcolato la differenza tra una dimensione e l'altra.

$$d_2 - d_1 = 0{,}2618595...$$

$$d_3 - d_2 = 0{,}2618595...$$

$$d_4 - d_3 = 0{,}2618595...$$

La differenza tra una dimensione e l'altra è costante (ed è uguale alle cifre decimali della prima dimensione). Questo vorrebbe dire che la dimensione aumenta costantemente e all'infinito.

In un secondo momento, abbiamo anche provato a calcolare la dimensione delle varie iterazioni usando però un lato di lunghezza diversa (2, 4, 5, ecc.) e siamo rimasti molto stupiti nel notare che la dimensione risultava ancora diversa rispetto a quella del lato 3. Com'è possibile che la dimensione cambi al variare della lunghezza del lato?

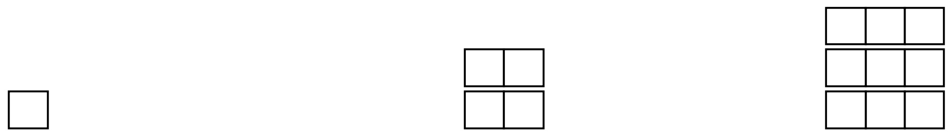
Il risultato della dimensione alla prima iterazione con lato 3 (d = 1,26…) è giusto, ma sono stati commessi due piccoli errori di interpretazione che possono rendere fuorvianti i risultati. Il primo errore riguarda il variare della dimensione all'aumentare del numero di iterazioni. Quando noi dobbiamo calcolare la dimensione del fiocco di neve, dobbiamo cercare un risultato che sia indipendente dal numero di iterazioni, e che quindi sia valido per il fiocco di neve in generale. In poche parole, dobbiamo calcolare la dimensione del fiocco di neve dopo infinite iterazioni (un fiocco completo). Fare ciò risulta ovviamente difficile. L'unico modo per indagare la dimensione è fare riferimento a due iterazioni consecutive. Ma quali iterazioni dobbiamo prendere in considerazione, visto che ci sono venuti risultati diversi sia al variare del numero di iterazioni che al variare del lato?

La risposta a questa domanda si può trovare analizzando il secondo errore che abbiamo commesso. Prendere un lato uguale a 3, è come prendere un lato uguale a 1 e dilatarlo di un fattore 3. Abbiamo scoperto che il fattore di dilatazione gioca un ruolo importante nel calcolo della dimensione, poiché esistono fattori "scomodi" che rendono difficili i calcoli. Infatti quando andiamo a vedere quante volte l'iterazione precedente sta in quella successiva, dobbiamo far in modo che l'iterazione precedente stia un numero intero di volte in quella successiva. Questo non accade con un fattore di dilatazione 2, 4, 5, ecc. E' per questo che, ogni volta che calcoliamo la dimensione (qualunque sia l'iterazione), dobbiamo dilatare di un fattore 3. In definitiva possiamo affermare che la dimensione del fiocco di neve è:

$$d = \log_3 4 = 1{,}2618595...$$

Altri gruppi hanno utilizzato diversi metodi di ragionamento.

Un gruppo, partendo da un quadrato di lato unitario, lo ha dilatato di fattori 2 e 3



n=1 n=2 n=3

Dilatando di un fattore 2 ottenevano quattro quadratini, dilatando di un fattore 3 ottenevano nove quadratini. Quindi la conclusione raggiunta è la stessa: gli oggetti finali corrispondono al fattore di dilatazione elevato alla dimensione. Si ritrova quindi la stessa formula già enunciata.

Un altro tentativo di trovare una formula risolutiva per la dimensione frattale è stato eseguito da un altro gruppo. Questo ha lavorato sul quadrato e il cubo. Il quadrato ha dimensione 2 perché un quadrato di lato t contiene t^2 quadrati di lato 1 o, in altri termini, dopo aver dilatato il quadrato di un fattore t si ottiene una figura che contiene t^2 quadrati uguali a quello di partenza. Analogamente il cubo ha dimensione 3 perché un cubo di lato t contiene t^3 quadrati di lato 1 o, in altri termini, dopo aver dilatato il cubo di un fattore t si ottiene una figura che ottiene t^3 cubi uguali a quello di partenza. Hanno iniziato cercando di capire cosa cambiasse dal quadratino di lato 1 al quadrato di lato 2.

Hanno considerato una dilatazione in cui il fattore di dilatazione è t, mentre il numero di figure base che contiene la figura finale è stato chiamato n.

Passando dal quadrato base a quello di lato 2 avevamo un fattore di dilatazione

$t = 2$ e $n = 4$.
Nel caso di un passaggio da un quadratino unitario di base a uno di lato 3 hanno

$t = 3$ e $n = 9$.

Entrambe queste figure hanno dimensione $d = 2$, si sono quindi chiesti quale operazione matematica che contenesse t e n e desse d.
Hanno provato con il logaritmo, nel caso del quadrato di lato 2, $\log_2 4 = 2$
e nel caso del quadrato di lato 3, $\log_3 9 = 2$
in generale $\log_t n = d$
nel caso del fiocco di neve, i numeri interessati sono: t=3 n=4
$\log_3 4 = 1{,}26$ dimensione del fiocco di neve
è infatti una dimensione compresa tra 1 e 2, cioè tra monodimensionale e bidimensionale.

Un altro gruppo nel cercare di ricavare la dimensione delle figure frattali si è imbattuto in un altro errore. Giunto alla stessa formula degli altri gruppi ha incontrato delle difficoltà, in quanto non riusciva a capire quale fosse il fattore di dilatazione della figura considerata dopo un'iterazione.

Applicando un'iterazione ritrovava nella figura successiva quattro elementi, più piccoli di un terzo, che però non corrispondevano all'elemento di partenza. La relazione quindi risultava

$$(1/3)^d=4$$

che, svolgendo i calcoli diventava $d = \log_{1/3} 4 = -1{,}2618...$

La dimensione è quella giusta, ma ovviamente, confrontandosi con gli altri gruppi hanno capito che doveva essere un valore positivo. Questo errore è stato determinato dal coefficiente di dilatazione. Per le figure frattali infatti, pur essendo il coefficiente di dilatazione un numero che dovrebbe essere scelto arbitrariamente, è necessario trovare un coefficiente con cui siamo in grado di lavorare e calcolare la dimensione della figura frattale. Questo poiché nella figura dopo la dilatazione e la successiva iterazione bisognava trovare un segmento che contenesse precisamente n copie dell'oggetto di partenza. Nel caso del fiocco di neve la dimensione sarà:

$$d = \log_3 4 = 1,2618595...$$

UNA CONSIDERAZIONE GENERALE

Il discorso sulla dimensione frattale in sé non serve a risolvere il problema iniziale sulla lunghezza della costa. Semplicemente l'idea era che, dopo aver introdotto lo studio dei frattali per affrontare il problema iniziale e dopo che ci siamo accorti che i frattali soddisfano regole geometriche un po' "particolari", diverse da quelle a cui siamo abituati, è stato interessante andare a esaminare un po' più in profondità la geometria dei frattali. Il concetto di dimensione si presta bene a mostrare le differenze con la geometria classica.

CONCLUSIONI

Al termine di questo lavoro, siamo riusciti a scoprire qualcosa di più nel campo dei frattali e attraverso essi abbiamo appreso che in ambito matematico esistono oggetti che non sono né monodimensionali né bidimensionali, ma che si collocano a metà tra queste due dimensioni. All'inizio, avendo a nostra disposizione scarse conoscenze in ambito dei frattali, abbiamo percorso diverse strade, alcune giuste e altre sbagliate, ma che al termine del lavoro si sono rivelate utili per risolvere il quesito proposto. Il tipo di procedimento che abbiamo utilizzato ci ha portato a formulare un modello matematico. Grazie a questo lavoro abbiamo abituato la nostra mente a lavorare con oggetti che sono apparentemente difficili da studiare (come calcolare la lunghezza della costa della Groenlandia), riconducendoli a figure geometriche (in questo caso triangoli), con le quali è più facile lavorare. Riportare sul forum gli sviluppi conseguiti in ogni incontro ha fatto sì che ciascun gruppo potesse condividere il proprio lavoro con gli altri, dai quali poi trarre suggerimenti, anche con l'aiuto del ricercatore a nostra disposizione. È stato interessante notare come, anche se ogni gruppo ha lavorato con modalità diverse e su oggetti diversi, le conclusioni sono state le medesime.

Hanno partecipato al progetto gli studenti:

Albi Marco, Angeli Monica, Barlassina Matteo, Colletti Gaia, D'Amato Federica, Di Fede Federico, Dossi Veronica, Eritrei Matteo, Farina Manuel, Fumia Federica, Guidi Matteo, Guzzi Alessandro, Lesini Alessia, Morlacchi Martina, Paffile Lorenzo, Rizzitano Francesca, Saccomandi Fulvio, Sodero Andrea, Spinapolice Massimiliano, Spolaor Simone, Tallini Matteo, Viola Giacomo, Zanelli Matteo (classe 4CL)

Frigerio Gianfranco, Napoli Stefano, Scolaro Simone (classe 5AL)