Il gruppo di simmetria (del cubo e) dell'ipercubo

Maria Dedò

Scopo di questo approfondimento è quello di dare una descrizione abbastanza dettagliata (sia dal punto di vista sintetico che da quello analitico) del gruppo di simmetria dell'ipercubo. Proprio al fine di chiarire tale scopo, premettiamo una descrizione del gruppo di simmetria del cubo: l'obiettivo sarà quello di darne una analoga nel caso dell'ipercubo.

Il gruppo di simmetria del cubo

Sia G il gruppo di simmetria del cubo.
Da un punto di vista sintetico, le isometrie dirette in G possono essere solo delle rotazioni, rispetto a un asse che passa per il centro O del cubo. A priori ci potrebbe essere il caso anche di traslazioni e avvitamenti, che però si possono escludere, perché ogni isometria che fissa il cubo ha necessariamente un punto fisso (il centro O del cubo).
L'asse di rotazione deve "bucare" la superficie del cubo in due punti, antipodali, che possono essere soltanto o due vertici opposti, o i punti medi di due spigoli opposti, oppure i centri di due facce opposte. Infatti, se per esempio l'asse interseca la superficie del cubo in un punto P che appartiene a uno spigolo s, ma non è un suo vertice, allora la rotazione manda s in sé stesso (l'immagine di s deve essere uno spigolo del cubo, e deve contenere il punto P che è fisso per la rotazione: ma s è l'unico spigolo che contiene P); allora, se la rotazione non è l'identità, P deve essere il punto medio di s. Un analogo ragionamento si applica se P è un punto interno a una faccia.
Quindi le possibili rotazioni (diverse dall'identità) sono:

- otto, ***(10083)*** di ordine 3, con asse per due vertici opposti (8 vertici, 4 assi e 2 rotazioni, di $\pm 2\pi/3$, per ciascun asse);
- sei, ***(10081)*** di ordine 2, con asse per i punti medi di due spigoli opposti (12 spigoli, 6 assi e una rotazione, di angolo π, per ciascun asse);
- nove, ***(10079)*** con asse per i centri di due facce opposte (6 facce, 3 assi e 3 rotazioni, di π e di $\pm\pi/2$, per ciascun asse): delle nove rotazioni, ce ne sono tre di angolo π (e ordine 2) e sei di angolo $\pm\pi/2$ (e ordine 4).

In tutto 23 rotazioni, a cui va aggiunta l'identità, per un totale di 24.
Per quanto riguarda le isometrie inverse, queste possono essere riflessioni (rispetto a un piano che passa per il centro O del cubo) oppure rotoriflessioni, cioè composizioni della rotazione intorno a un asse r con la riflessione rispetto a un piano α ortogonale a r (e, per i motivi già detti, r e α si incontrano nel centro O del cubo).
Le riflessioni sono nove ***(1098)***, di cui tre rispetto a piani paralleli ***(5732)*** a due facce opposte del cubo e sei rispetto a piani ***(4399)*** che contengono due spigoli opposti del cubo.
Le rotoriflessioni sono 15:

- una è l'applicazione antipodale (rotoriflessione di angolo π, rispetto a una qualsiasi coppia retta/piano passanti per O e fra loro ortogonali);

- otto hanno asse per due vertici opposti e angolo di rotazione di $\pm\pi/3$ (si esclude la rotazione di π, perché si ritroverebbe l'applicazione antipodale che abbiamo già contato);
- sei hanno asse per i centri di due facce opposte e angolo di rotazione di $\pm\pi/2$ (con la stessa osservazione del caso precedente per quanto riguarda la rotazione di π).

Vale la pena osservare che, nel secondo caso, le due isometrie di cui la rotoriflessione è composizione NON appartengono, né l'una né l'altra, al gruppo di simmetria del cubo.
Si sono ottenute così 24 isometrie dirette e 24 inverse, cioè 48 in totale.

Per dare una descrizione analitica del gruppo di simmetria del cubo, occorre fissare un sistema di riferimento e conviene farlo in maniera "comoda",per esempio scegliendo l'origine nel centro del cubo, gli assi paralleli agli spigoli del cubo, e l'unità di misura in maniera tale che lo spigolo del cubo sia di lunghezza 2. Con queste scelte, i vertici sono gli otto punti di coordinate ($\pm$1,$\pm$1,$\pm$1) e i centri delle facce sono i sei punti di coordinate ($\pm$1,0,0), (0,$\pm$1,0), (0,0,$\pm$1).
Un'isometria che manda il cubo in se stesso è un'applicazione lineare (fissa il centro del cubo, cioè l'origine) e quindi rappresentabile con una matrice (ortogonale) 3×3, le cui colonne sono le immagini dei tre vettori della base canonica. Dato che questi sono centri delle facce del cubo, anche le loro immagini sono centri delle facce del cubo, sicché le colonne della matrice vanno scelte fra i 6 vettori ($\pm$1,0,0), (0,$\pm$1,0), (0,0,$\pm$1), che occorre accostare in maniera tale da ottenere una matrice invertibile. Ci sono 48 matrici di questo tipo:

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm1 \\ \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \end{pmatrix}$$

id (1,2,3) (1,3,2)

$$\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \\ 0 & \pm1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \pm1 & 0 \\ \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm1 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ \pm1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2,3) (1,2) (1,3)

Sotto ciascuno di questi gruppi di matrici (ognuno dei quali comprende otto diverse possibilità, a seconda della scelta dei segni) è scritta una permutazione (di tre elementi) che dà conto di dove ubicare nella matrice i tre coefficienti non nulli. Ogni trasformazione in *G* si identifica allora con una permutazione e una scelta di segni. Ad esempio la matrice individuata dalla permutazione (1,2,3) (ovvero quella che manda 1 in 2, 2 in 3, 3 in 1) e dalla terna + + - corrisponde alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè alla matrice in cui i soli elementi non nulli sono $a_{12} = +1$, $a_{23} = +1$, $a_{31} = -1$.
Si tratta di matrici ortogonali, quindi gli autovalori possono essere solo +1, -1, oppure autovalori complessi (qui sotto indicati con **C**). I casi possibili sono sei e, tenendo presente il significato geometrico di autovalori e autovettori, si ottiene immediatamente la corrispondenza tra la casistica degli autovalori e la classificazione sintetica:

+1,+1,+1 identità;

+1,+1,-1 riflessione rispetto a un piano (che è l'autospazio relativo all'autovalore +1);

+1,-1,-1 rotazione di angolo π intorno a una retta (che è l'autospazio relativo a +1);

-1,-1,-1 applicazione antipodale;

+1,**C**,**C** rotazione di un angolo $\alpha \neq \pi$: l'asse è l'autospazio relativo a +1;

-1,**C**,**C** rotoriflessione di un angolo $\alpha \neq \pi$: l'asse è l'autospazio relativo a -1.

Si possono contare le diverse possibilità per ciascun caso, a partire dal polinomio caratteristico della matrice, e nel conto può essere utile distinguere le matrici a seconda della permutazione associata, dato che da questa dipende quanti sono gli elementi non nulli della matrice sulla diagonale principale (e quindi come è fatto il polinomio caratteristico).

Le otto matrici corrispondenti alla permutazione Id hanno un polinomio caratteristico del tipo $(\lambda\pm1)(\lambda\pm1)(\lambda\pm1)$, quindi hanno tre autovalori reali: a seconda dei segni, ritroviamo l'identità, tre riflessioni, tre rotazioni di angolo π e l'applicazione antipodale. Inoltre, gli autovettori sono paralleli agli assi, sicché si può anche dire che le tre riflessioni sono quelle rispetto a piani paralleli alle facce del cubo e le tre rotazioni sono quelle il cui asse passa per i centri delle facce del cubo.

Le 16 matrici corrispondenti alle permutazioni (1,2,3) e (1,3,2), cioè ai cicli di lunghezza 3, hanno un polinomio caratteristico della forma $\lambda^3\pm1$, che ha una radice reale e due complesse: otto hanno un autovalore +1 e due autovalori complessi (e corrispondono alle rotazioni di asse per due vertici opposti) e altre otto hanno un autovalore -1 e due autovalori complessi (e corrispondono alle otto rotoriflessioni con asse per due vertici opposti).

Le 24 matrici corrispondenti alle altre tre permutazioni (1,2), (1,3), (2,3), cioè ai cicli di lunghezza 2, hanno un polinomio caratteristico della forma $(\lambda\pm1)(\lambda^2\pm1)$. Quindi ce ne sono 12 che hanno tre autovalori reali e altre 12 che hanno un autovalore reale e due complessi. Fra le prime 12, ce ne sono sei con autovalori reali +1, +1, -1, che sono le riflessioni rispetto a piani che contengono due spigoli opposti del cubo, e altre sei con autovalori reali +1, -1, -1, che sono le rotazioni di angolo π, il cui asse passa per i punti medi di due spigoli opposti. Fra le 12 del secondo gruppo, con autovalori complessi, ce ne sono sei (con autovalore reale +1) che corrispondono alle rotazioni di angolo $\pm\pi/2$, intorno a assi per i centri di due facce opposte, e altre sei (con autovalore reale -1) che corrispondono alle rotoriflessioni di angolo $\pm\pi/2$, intorno agli stessi assi. La seguente tabella riassume queste informazioni.

cosa sono	**autovalori**	**permutazione**	**quante sono**	
identità	+ + +	Id	1	**A1**
riflessioni	+ + -	Id	3	**B1**
		(a,b)	6	**B2**
rotazioni di π	+ - -	Id	3	**C_r1**
		(a,b)	6	**C_r2**
rotazioni di $\alpha\neq\pi$	+ **C C**	(a,b)	6	**C_c2**
		(a,b,c)	8	**C_c3**
antipodale	- - -	Id	1	**D_r1**
rotoriflessioni di $\alpha\neq\pi$	- **C C**	(a,b)	6	**D_c2**
		(a,b,c)	8	**D_c3**
TOT			**48**	

Nella prima colonna si indica il tipo di isometria; nella seconda gli autovalori; nella terza il tipo di permutazione a cui la matrice corrisponde (identità, ciclo di lunghezza 2, oppure ciclo di lunghezza 3); nella quarta sono riportati i numeri dei casi corrispondenti. Infine, nell'ultima colonna, è riportata una notazione che sarà poi comodo esportare al caso dell'ipercubo e che è così costruita: la lettera (**A**, **B**, **C**, **D**) distingue i quattro casi che si ottengono dal punto di vista sintetico, pensando a un'isometria come alla composizione di *k* riflessioni (**A** corrisponde a *k*=0 riflessioni; **B** a *k*=1; **C** a *k*=2; **D** a *k*=3); la lettera *r* oppure *c* distingue (nei due casi **C** e **D**) il caso di matrici con soli autovalori reali ($\mathbf{C_r}$ e $\mathbf{D_r}$) o anche autovalori complessi ($\mathbf{C_c}$ e $\mathbf{D_c}$), il che corrisponde a una rotazione di angolo π oppure, rispettivamente, di un angolo diverso da π; il numero infine indica il tipo di permutazione associata alla matrice (**1** corrisponde all'identità; **2** a un ciclo di lunghezza 2, **3** a un ciclo di lunghezza 3).
Naturalmente questo va e vieni tra sintetico e analitico può non fermarsi all'elenco delle trasformazioni nel gruppo di simmetria del cubo: fra i tanti esempi possibili, ne richiamiamo uno che avrà poi interesse esaminare anche nel caso dell'ipercubo. Fra le matrici in *G*, la metà hanno fra i loro coefficienti un numero pari di segni + e la metà ne hanno un numero dispari; il primo di questi due sottoinsiemi forma un sottogruppo di *G*, che chiamiamo *K*. Dal punto di vista sintetico, *K* comprende quelle trasformazioni che fissano i due tetraedri regolari che hanno vertici nei vertici alterni del cubo (cioè i vertici le cui coordinate hanno o sempre un numero pari di segni + o sempre un numero dispari); ***(3359)*** *K* è un sottogruppo di indice 2 (ogni isometria che fissa il cubo o fissa entrambi i tetraedri oppure li scambia fra loro), ha quindi 24 elementi ed è il gruppo di simmetria di un tetraedro regolare: comprende l'identità, le 6 riflessioni in **B2** (e non le altre 3), le 3 rotazioni di ordine 2 in $\mathbf{C_r 1}$, le 8 di ordine 3 in $\mathbf{C_c 3}$, e infine le 6 rotoriflessioni in $\mathbf{D_c 2}$.

Si può notare che gli elementi di *K* sono (come è naturale che sia, pensando all'interpretazione analitica) isometrie dirette nel caso di trasformazioni che corrispondono a una permutazione pari (identità o ciclo di lunghezza 3), per le quali la matrice con tutti i coefficienti +1 ha determinante +1, mentre sono isometrie inverse nel caso di trasformazioni che corrispondono a una permutazione dispari (ciclo di lunghezza 2), per le quali la matrice con tutti i coefficienti +1 ha determinante -1. La situazione è sintetizzata nella prossima tabella, che organizza in altra maniera le stesse informazioni della tabella precedente, con l'aggiunta della specifica di quali trasformazioni appartengono al sottogruppo *K* (sono le caselle a sfondo grigio).

	A	**B**	**C**		**D**		**Tot**
			$\mathbf{C_r}$	$\mathbf{C_c}$	$\mathbf{D_r}$	$\mathbf{D_c}$	
1	1	3	3	///	1	///	**8**
2	///	6	6	6	///	6	**24**
3	///	///	///	8	///	8	**16**
Tot	**1**	**9**	**9**	**14**	**1**	**14**	**48**

Il gruppo di simmetria dell'ipercubo

Si può pensare all'ipercubo ***(107)*** come ottenuto da un cubo ***(9788)*** con una costruzione analoga alla costruzione con cui dal quadrato si ottiene il cubo ***(9787)***: si parte da un cubo, in un iperpiano H dello spazio a quattro dimensioni, e lo si trasla di un vettore ortogonale a H e di lunghezza pari allo spigolo del cubo. L'immagine per traslazione è un altro cubo, su un iperpiano parallelo; l'ipercubo è il politopo ottenuto come inviluppo convesso dei vertici dei due cubi. Si tratta di un politopo con otto facce di dimensione 3, cubiche (il cubo "di partenza", il cubo "di arrivo", e i sei cubi ottenuti traslando le sei facce quadrate del cubo di partenza), 24=6+6+12 facce di dimensione 2, quadrate (sei sul primo cubo, sei sul secondo e 12 ottenute per traslazione dai 12 spigoli del cubo di partenza), 32 = 12+12+8 spigoli (12 sul primo cubo, 12 sul secondo e otto ottenuti per traslazione dagli otto vertici del cubo di partenza) e 16 vertici (otto sul cubo di partenza e otto su quello di arrivo).

Questa descrizione è suggestiva, ma è un po' fuorviante dal punto di vista di ciò che ci interessa al momento, ovvero l'analisi del gruppo di simmetria dell'ipercubo (che ancora indichiamo con G). La descrizione analitica è sicuramente "più simmetrica": come nel caso del cubo, si può fissare un sistema di riferimento con l'origine nel centro dell'ipercubo, gli assi paralleli agli spigoli e unità di misura tale che lo spigolo dell'ipercubo abbia lunghezza 2, sicché i (16) vertici hanno coordinate $(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1)$; i centri delle 3-facce sono gli otto punti corrispondenti ai vettori della base canonica e ai loro opposti. Possiamo anche contare gli spigoli e le 2-facce osservando che i punti medi degli spigoli sono i punti del tipo $(\pm1,\pm1,\pm1,0)$ (ci sono 8 scelte per i segni e 4 per la posizione dello 0 e quindi si ritrova, anche per questa via, il fatto che gli spigoli sono 32), mentre i centri delle 2-facce sono i punti del tipo $(\pm1,\pm1,0,0)$: ci sono quattro scelte per i segni e sei scelte per la posizione dei due 0, e quindi le 2-facce sono 24.

Con notazioni analoghe a quelle utilizzate nel caso del cubo, si può dire che ogni isometria dello spazio a 4 dimensioni che fissa un ipercubo è composizione di $k\leq4$ riflessioni (4, e non 5 come a priori potrebbe essere, perché l'isometria ha sicuramente un punto fisso nel centro dell'ipercubo). Può quindi trattarsi di:

- **A** k=0 l'identità;
- **B** k=1 una riflessione, rispetto a un 3-iperpiano;
- **C** k=2 una rotazione, intorno a un 2-piano;
- **D** k=3 una rotoriflessione, composizione di una rotazione intorno a un 2-piano e di una riflessione rispetto a un 3-iperpiano che lo interseca ortogonalmente in una retta;
- **E** k=4 una composizione di due rotazioni, intorno a due 2-piani fra loro ortogonali.

Dal punto di vista analitico, ogni elemento di G è una matrice M, ciascuna delle cui colonne appartiene a $\{\pm\mathbf{e}_1,\pm\mathbf{e}_2,\pm\mathbf{e}_3,\pm\mathbf{e}_4\}$, dove $\mathbf{e}_i$ è l'i-esimo vettore della base canonica, quindi M è individuata da una permutazione ρ dell'insieme {1,2,3,4} (che dà la posizione dei coefficienti non nulli nella matrice M) insieme a una quaterna di segni (che indica se questi coefficienti sono +1 oppure -1). Ognuna delle 24 permutazioni dà luogo quindi a 2^4=16 matrici, per un totale di 24×16=384 elementi in G. Si possono distinguere le permutazioni rispetto alla loro decomposizione in cicli, indicando con:

1 l'identità;
2 i cicli di lunghezza 2 (ce ne sono 6);
3 i cicli di lunghezza 3 (ce ne sono 8);
4 i cicli di lunghezza 4 (ce ne sono 6);
22 le composizioni di 2 cicli di lunghezza 2 (ce ne sono 3).

La casistica rispetto agli autovalori (e la corrispondente interpretazione sintetica) comprende per una matrice ortogonale 4×4 le seguenti situazioni:

+1,+1,+1,+1	**A**	identità;
+1,+1,+1,-1	**B**	riflessione rispetto a un 3-iperpiano (autospazio relativo a +1);
+1,+1,-1,-1	**C_r**	rotazione di angolo π intorno a un 2-piano (autospazio relativo a +1);
+1,-1,-1,-1	**D_r**	rotoriflessione di angolo π;
-1,-1,-1,-1	**E_{rr}**	applicazione antipodale (composizione di due rotazioni di angolo π intorno a due 2-piani ortogonali fra loro);
+1,+1,**C,C**	**C_c**	rotazione intorno a un 2-piano di un angolo $\alpha\neq\pi$;
+1,-1,**C,C**	**D_c**	rotoriflessione di un angolo $\alpha\neq\pi$;
-1,-1,**C,C**	**E_{rc}**	composizione di due rotazioni, una di angolo π e l'altra di un angolo $\alpha\neq\pi$, intorno a due 2-piani ortogonali fra loro;
C,C,**C,C**	**E_{cc}**	composizione di due rotazioni, di angoli $\alpha\neq\pi$ e $\beta\neq\pi$, intorno a due 2-piani ortogonali fra loro.

Come nel caso del cubo, i pedici *r* e *c* nel casi C e D (e il doppio pedice nel caso E) corrispondono al caso di una coppia di autovalori reali (o, rispettivamente, complessi) cioè, dal punto di vista sintetico, a una rotazione di angolo π (o, rispettivamente, di un angolo $\alpha\neq\pi$).
Si può allora, come nel caso del cubo, partire dal polinomio caratteristico della matrice $M=M_\rho$ e analizzare, caso per caso, ciò che questo determina per quanto riguarda autovalori e autovettori e quante sono quindi le corrispondenti trasformazioni.
Il polinomio caratteristico della matrice $M = M_\rho$ ha la forma:

- $(\lambda\pm1)(\lambda\pm1)(\lambda\pm1)(\lambda\pm1)$ se ρ = id, cioè per le 16 matrici in **1**;
- $(\lambda\pm1)(\lambda\pm1)(\lambda^2\pm1)$ se ρ = (a,b) è un ciclo di lunghezza 2, cioè per le 6×16 matrici in **2**;
- $(\lambda\pm1)(\lambda^3\pm1)$ se ρ = (a,b,c) è un ciclo di lunghezza 3, cioè per le 8×16 matrici in **3**;
- $(\lambda^4\pm1)$ se ρ = (a,b,c,d) è un ciclo di lunghezza 4, cioè per le 6×16 matrici in **4**;
- $(\lambda^2\pm1)(\lambda^2\pm1)$ se ρ = (a,b)(c,d) è composizione di due cicli di lunghezza 2, cioè per le 3×16 matrici in **22**.

Nel caso **1** delle matrici diagonali ci sono 4 autovalori reali e fra le 16 matrici si ritrova:

- **A1** l'identità;
- **B1** 4 riflessioni;
- **C_r1** 6 rotazioni di angolo π;
- **D_r1** 4 rotoriflessioni di angolo π;
- **E_{rr}1** l'applicazione antipodale.

Nel caso **2** due degli autovalori sono sempre reali, mentre gli altri due possono essere reali (e in tal caso hanno segno opposto) oppure complessi. Si ottengono le 96 = 6×16 trasformazioni, elencate qui di seguito (per ciascun gruppo, oltre al loro numero e al tipo di trasformazione, si specificano gli autovalori e il polinomio caratteristico).

- **B2** 12=6×2 riflessioni; +1,+1,+1,-1; $(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda^2-1)$;
- **C_c2** 12=6×2 rotazioni; +1,+1,**C**,**C**; $(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda^2+1)$;
- **D_r2** 12=6×2 rotoriflessioni; +1,-1,-1,-1; $(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda^2-1)$;
- **E_{rc}2** 12=6×2 composizioni di rotazioni; -1,-1,**C**,**C**; $(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda^2+1)$;
- **D_c2** 24=6×4 rotoriflessioni; +1,-1,**C**,**C**; $(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+1)$;
- **C_r2** 24=6×4 rotazioni; +1,+1,-1,-1; $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2-1)$.

Nel caso **3**, il polinomio caratteristico può essere $(\lambda\pm1)(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$ oppure $(\lambda\pm1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$; si ottengono sempre due autovalori reali e due autovalori complessi e quindi le seguenti 128 = 8×16 trasformazioni:

- **C_c3** 32=8×4 rotazioni; +1,+1,**C**,**C**; $(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)$;
- **E_{rc}3** 32=8×4 composizioni di rotazioni; -1,-1,**C**,**C**; $(\lambda+1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$;
- **D_c3** 64=8×8 rotoriflessioni; +1,-1,**C**,**C**; $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2+\lambda+1)$
  oppure $(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1)$.

Nel caso **4**, il polinomio caratteristico può essere (λ^4+1) oppure (λ^4-1). Si ottengono quindi le seguenti 96=6×16 trasformazioni:

- **D_c4** 48=6×8 rotoriflessioni; +1,-1,**C**,**C**; $(\lambda^2+1)(\lambda-1)(\lambda+1)$;
- **E_{cc}4** 48=6×8 composizioni di rotazioni; **C**,**C**,**C**,**C**; λ^4+1.

Infine, nel caso **22** si ottengono le 48 = 3×16 trasformazioni:

- **C_r22** 12=3×4 rotazioni; +1,+1,-1,-1; $(\lambda^2-1)(\lambda^2-1)$;
- **E_{cc}22** 12=3×4 composizioni di rotazioni; **C**,**C**,**C**,**C**; $(\lambda^2+1)(\lambda^2+1)$;
- **D_c22** 24=3×8 rotoriflessioni; +1,-1,**C**,**C**; $(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)$.

Le conclusioni di questa analisi sono sintetizzate nelle due seguenti tabelle, analoghe alle due che riassumono le informazioni a proposito del gruppo di simmetria del cubo.

	A	**B**	**C**		**D**		**E**			**Tot**	**tot in *K***
			C_r	**C_c**	**D_r**	**D_c**	**E_{rr}**	**E_{rc}**	**E_{cc}**		
1	1	4	6	///	4	///	1	///	///	**16**	**8**
2	///	12	24	12	12	24	///	12	///	**96**	**48**
3	///	///	///	32	///	64	///	32	///	**128**	**64**
4	///	///	///	///	///	48	///	///	48	**96**	**48**
22	///	///	12	///	///	24	///	///	12	**48**	**24**
Tot	**1**	**16**	**42**	**44**	**16**	**160**	**1**	**44**	**60**	**384**	**192**

La prima riporta per colonna la distinzione a seconda del tipo di isometria e per riga la distinzione a seconda della permutazione a cui è associata la matrice. Anche in questo caso l'interpretazione analitica delle caselle a sfondo grigio è quella di mettere in evidenza le trasformazioni che appartengono al sottogruppo (che ancora indichiamo con *K*) costituito da quelle matrici che hanno fra i loro coefficienti un numero pari di +1. Se ne darà a breve un'interpretazione sintetica; si osservi intanto che, contrariamente al caso tridimensionale, questa volta l'applicazione antipodale appartiene al sottogruppo *K*.

Anche la seconda tabella è del tutto analoga alla corrispondente tabella per il cubo:

	cosa sono	**autovalori**	**permutazione**	**quante sono**
A1	Identità	+ + + +	Id	1
B1	Riflessione	+ + + -	Id	4
B2			(a,b)	12
C_r1	rotazione di π	+ + - -	Id	6
C_r2			(a,b)	24
C_r22			(a,b)(c,d)	12
C_c2	rotazione di $\alpha\neq\pi$	+ + **CC**	(a,b)	12
C_c3			(a,b,c)	32
D_r1	rotoriflessione di π	+ - - -	Id	4
D_r2			(a,b)	12
D_c2	rotoriflessione di $\alpha\neq\pi$	+ - **CC**	(a,b)	24
D_c3			(a,b,c)	64
D_c4			(a,b,c,d)	48
D_c22			(a,b)(c,d)	24
E_{rr}1	composizione di due rotazioni, entrambe di angolo π (antipodale)	- - - -	Id	1
E_{rc}2	composizione di due rotazioni, di angoli πe $\alpha\neq\pi$	- - **CC**	(a,b)	12
E_{rc}3			(a,b,c)	32
E_{cc}4	composizione di due rotazioni, di angoli $\alpha\neq\pi$ e $\beta\neq\pi$	**C C C C**	(a,b,c,d)	48
E_{cc}22			(a,b)(c,d)	12
TOT				**384**

Ci poniamo ora l'obiettivo di ricavare gli stessi numeri dal punto di vista sintetico: non si daranno tutte le giustificazioni necessarie, ma solo alcuni esempi, allo scopo di dare un'idea delle diverse modalità di (descrizione e di) conteggio che si possono usare.

Alcune caselle non danno naturalmente alcun problema, come le due corrispondenti all'identità (**A1**) e all'applicazione antipodale (**$\mathbf{E_{rr}}$1**).
Osserviamo ora che i numeri (4 e 12) che compaiono nelle righe corrispondenti a **B1** e **B2**, e poi ancora nelle righe relative a **$\mathbf{D_r}$1** e **$\mathbf{D_r}$2** rappresentano proprio la metà del numero delle 3-facce e del numero delle 2-facce dell'ipercubo. È facile immaginare che non sia una coincidenza; e in effetti, le trasformazioni corrispondenti a tali righe sono riflessioni e rotoriflessioni di π, ovvero, in entrambi i casi, trasformazioni per cui l'unico elemento di simmetria coinvolto è un 3-iperpiano H (ovvero una retta r, la retta per il centro O dell'ipercubo ortogonale a H: l'uno individua univocamente l'altra e viceversa); nel caso delle riflessioni in **B**, la trasformazione è l'identità su H e l'antipodale sulla retta ortogonale r, nel caso delle rotoriflessioni in **$\mathbf{D_r}$**, la trasformazione è, viceversa, l'antipodale su H e l'identità sulla retta ortogonale r. Occorre quindi capire in quanti modi si può scegliere H in modo che queste trasformazioni mandino l'ipercubo in se stesso. Una possibilità è un iperpiano parallelo a due 3-facce opposte (che lascia questi due cubi da parti opposte e taglia gli altri sei secondo un piano di simmetria parallelo a due 2-facce opposte), corrispondente a una retta (ortogonale) r passante per i centri di due 3-facce opposte: ci sono quattro iperpiani di questo tipo perché le 3-facce sono otto (dal punto di vista analitico, si tratta dei quattro iperpiani coordinati x=0, y=0, z=0, w=0) e a questi corrispondono le quattro riflessioni in **B1** e le quattro rotoriflessioni in **$\mathbf{D_r}$1**. Un'altra possibilità è quella di un iperpiano parallelo a due 2-facce opposte (che interseca quattro degli otto cubi in una 2-faccia quadrata e gli altri quattro secondo un piano di simmetria parallelo a due spigoli opposti); la corrispondente retta ortogonale r passa per i centri di due 2-facce opposte: ci sono 12 iperpiani di questo tipo perché le 2-facce sono 24 (e dal punto di vista analitico li ritroviamo come gli iperpiani del tipo $x\pm y=0$; e sono 12 perché ci sono sei scelte per fissare due delle quattro coordinate e due scelte per il segno); a questi corrispondono le 12 riflessioni in **B2** e le 12 rotoriflessioni in **$\mathbf{D_r}$2**.
Si sarebbe potuto arrivare alle stesse conclusioni anche in un altro modo (che però, in questo caso specifico, risulta meno comodo), ovvero partendo da un cubo e da un suo 2-piano di simmetria. Si può infatti immaginare di "moltiplicare" tutta la situazione per una direzione ortogonale al 3-spazio che contiene il cubo: il cubo diventa un ipercubo e il 2-piano di simmetria del cubo diventa un 3-iperpiano di simmetria per l'ipercubo. Il motivo per cui questa strategia non è tanto comoda in questo caso è che occorre fare attenzione a non contare due volte la stessa situazione.
Ci sono altri casi in cui questo tipo di descrizione si presta meglio al conteggio, proprio perché non c'è il rischio di contare le stesse cose due volte. Ad esempio, partendo da un asse (s) di ordine 3 in un cubo, si può considerare un ipercubo che sia il prodotto di tale cubo per un intervallo ortogonale al 3-spazio H che contiene il cubo; il prodotto della retta s per la retta (r) che contiene questo intervallo è un 2-piano che contiene due assi paralleli di ordine 3 in due cubi che sono 3-facce opposte nell'ipercubo. Sono 16 i 2-piani di questo tipo (ci sono quattro coppie di 3-facce opposte e, per ciascuno di questi casi, si può ancora scegliere uno dei quattro assi di simmetria di ordine 3 in un cubo); fissato uno di questi 2-piani si possono considerare otto diverse trasformazioni che fissano l'ipercubo:

- le due rotazioni (di $\pm 2\pi/3$) che hanno questo piano come insieme di punti fissi: le si può vedere ottenute agendo su H con la rotazione di asse s e su r con l'identità;

- le due rotoriflessioni (di angoli $\pm 2\pi/3$) che si ottengono agendo su H con la rotazione di asse s e su r con l'applicazione antipodale;
- le due rotoriflessioni (di angoli $\pm 2\pi/3$) che si ottengono agendo su H con la rotoriflessione di asse s e su r con l'identità;
- la composizione di una rotazione di angolo π e una di $\pm 2\pi/3$ su un piano ortogonale che si ottiene agendo su H con la rotoriflessione di asse s e su r con l'applicazione antipodale (si osservi che, ristretta al piano individuato da r e da s, la trasformazione agisce come l'antipodale, ossia, essendo su un 2-piano, come la rotazione di π).

Abbiamo in questo modo ottenuto le 32 rotazioni in $\mathbf{C_c3}$, le 64=32+32 rotoriflessioni in $\mathbf{D_c3}$ e le 32 composizioni di rotazioni in $\mathbf{E_{rc}3}$.

Si può usare una strategia analoga per contare anche altri casi, e precisamente tutti quelli in cui almeno un autovettore (meglio ancora se solo uno, in modo da non avere il problema delle situazioni contate due volte!) è parallelo alla direzione degli assi coordinati; in tutti questi casi possiamo ricostruire la trasformazione di simmetria dell'ipercubo a partire da quella del cubo "moltiplicando" opportunamente per una retta su cui la trasformazione agisca come l'identità ovvero come l'antipodale: in questo modo si possono trovare le 24 rotazioni in $\mathbf{C_r2}$, le 12 in $\mathbf{C_c2}$, le 6 in $\mathbf{C_r1}$, le 24 rotoriflessioni in $\mathbf{D_c2}$ e le 12 composizioni di rotazioni in $\mathbf{E_{rc}2}$.

Restano da contare i casi in cui le matrici corrispondono alle permutazioni di tipo **4** oppure di tipo **22**, che sono per l'appunto casi in cui (non ci sono coefficienti sulla diagonale principale e quindi) nessun autovettore è parallelo alla direzione degli assi (cioè agli spigoli dell'ipercubo) e vanno quindi trovate altre strategie di conteggio.

Un primo esempio sono le 12 composizioni di rotazioni in $\mathbf{E_{cc}22}$, che si possono descrivere come la composizione di due rotazioni di $\pm\pi/2$ su due piani fra loro ortogonali ed entrambi paralleli a una 2-faccia dell'ipercubo: ci sono 3 scelte per la coppia di 2-facce fra loro ortogonali, e poi, per ciascuna di queste, 4 possibili scelte per il verso delle rotazioni.

Una direzione privilegiata (e non parallela agli spigoli dell'ipercubo) che è naturale prendere in considerazione è quella individuata da due vertici opposti v e v' dell'ipercubo. L'iperpiano assiale H di questi due punti NON è un iperpiano di simmetria per l'ipercubo (come peraltro succede anche per il cubo), però può essere utile studiare come si comporta la riflessione rispetto ad H: l'iperpiano H contiene sei dei 16 vertici dell'ipercubo, precisamente quei sei che, insieme a v e v', costituiscono uno dei due insiemi (chiamiamoli $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$) di otto vertici "alterni" dell'ipercubo. Usando le coordinate, $\mathscr{A}$ (rispettivamente, $\mathscr{A}'$) contiene gli otto vertici le cui coordinate hanno un numero pari (rispettivamente, dispari) di segni +; prescindendo dalle coordinate, per individuare $\mathscr{A}$ e $\mathscr{A}'$ basta dire che se due vertici sono collegati da uno spigolo dell'ipercubo e se il primo sta in $\mathscr{A}$ allora l'altro sta in $\mathscr{A}'$ (e viceversa).

Gli otto vertici di $\mathscr{A}$ (e anche gli otto di $\mathscr{A}'$) sono vertici di un iperottaedro $\mathscr{P}$ (rispettivamente, $\mathscr{P}'$) e questo può stupire se si pensa ai due tetraedri nel cubo ***(3359)***. Un iperottaedro ***(5493)*** (è l'analogo di un ottaedro ***(4265)*** in dimensione 4, cioè) si può immaginare come una doppia piramide ***(10527)*** sull'ottaedro (come l'ottaedro è una doppia piramide su un quadrato); è caratterizzato dal fatto che le quattro coppie di vertici opposti rappresentano quattro direzioni a due a due ortogonali fra loro; le coordinate ci permettono facilmente di verificare che gli otto

vertici dell'ipercubo con un numero pari (rispettivamente, dispari) di segni + hanno proprio questa caratteristica. Abbiamo così un'interpretazione sintetica del sottogruppo *K*: ogni isometria che fissa l'ipercubo può o scambiare fra loro i due iperottaedri $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ o fissarli entrambi e *K* è il sottogruppo di quelle isometrie che li fissano entrambi. Si osservi per inciso che c'è però una differenza notevole rispetto al caso tridimensionale dei due tetraedri nel cubo: nel caso tridimensionale, *K* è proprio il gruppo di simmetria del tetraedro regolare, che è in effetti un sottogruppo di indice 2 nel gruppo del cubo. Qui invece *K* NON è il gruppo di simmetria dell'iperottaedro (né potrebbe esserlo, dato che questo è isomorfo a tutto *G*): *K*, che è un sottogruppo di indice 2 in *G*, è anche un sottogruppo di indice 2 nel gruppo di simmetria di ognuno di questi due iperottaedri (che, oltre alle trasformazioni di *K*, comprende altre trasformazioni che NON fissano l'ipercubo); in realtà, proprio questo fatto ci sarà utile nella descrizione che stiamo dando.
Supponiamo allora che i vertici *v* e *v′* da cui si è partiti siano vertici di $\mathcal{P}$; *H*, iperpiano assiale di *v* e *v′*, è un iperpiano di simmetria per $\mathcal{P}$, mentre manda $\mathcal{P}'$ in un altro iperottaedro (chiamiamolo $\mathcal{P}''$), i cui vertici NON sono vertici dell'ipercubo, ma sono nelle direzioni dei centri delle 3-facce: si tratta precisamente degli otto punti di coordinate (±2,0,0,0), (0,±2,0,0), (0,0,±2,0), (0,0,0,±2); e i 24=3×8 vertici di questi tre iperottaedri, messi tutti insieme, sono vertici di un altro politopo regolare: il 24.celle ***(7661)*** (ma questo è un altro discorso…).
Questo accade per TUTTI gli iperpiani *H* che sono iperpiani di simmetria di $\mathcal{P}$, mentre, se *H* è iperpiano di simmetria per $\mathcal{P}'$, allora la riflessione rispetto a *H* fissa $\mathcal{P}'$ e scambia $\mathcal{P}$ con $\mathcal{P}''$. Allora, se componiamo due di queste riflessioni, rispetto a due iperpiani differenti, ma entrambi iperpiani di simmetria dello stesso iperottaedro (e fra loro ortogonali), otteniamo una trasformazione che fissa l'ipercubo. Si tratta di una rotazione di angolo π, quindi una trasformazione di quelle che abbiamo indicato con $\mathbf{C_r 22}$ (non potrebbe infatti essere una di quelle indicate con $\mathbf{C_r 1}$ o $\mathbf{C_r 2}$ perché in quei casi sappiamo che il piano dei punti fissi contiene due assi coordinati); troviamo 12 casi di questo tipo: ci sono infatti otto scelte per il primo iperpiano, cioè per la prima direzione data da una coppia di due vertici opposti, e tre scelte per il secondo iperpiano ortogonale al primo, per il quale va scelta una coppia di vertici opposti che faccia parte dello stesso iperottaedro rispetto alla prima. In questo modo però ogni trasformazione è stata ottenuta due volte, quindi in totale le trasformazioni sono 12=(8×3)/2. Naturalmente queste 12 trasformazioni stanno nel sottogruppo *K*, cioè fissano i 2 iperottaedri.
Un altro gruppo di trasformazioni in *K* sono le 48 rotoriflessioni in $\mathbf{D_c 4}$, che si possono descrivere nel modo seguente: come iperpiano di riflessione *H* consideriamo uno degli otto iperpiani assiali fra 2 vertici opposti *v* e *v′* (quelli che abbiamo appena considerato); come prima, individuiamo su *H* una retta che passi per un'altra coppia di vertici opposti *w* e *w′* (che appartengano ad *H*). Questa volta però componiamo la riflessione rispetto all'iperpiano *H* con la trasformazione che agisce su *H* come una rotazione di angolo $\pm\pi/2$ e di asse per *w* e *w′*. Un esempio di questo tipo è la trasformazione che permuta ciclicamente le 4 coordinate, ovvero (*x*,*y*,*z*,*w*) -> (*y*,*z*,*w*,*x*), per la quale la retta di punti fissi è nella direzione della coppia di vertici opposti *w*=(1,1,1,1) e *w′*=(-1,-1,-1,-1) e la retta su cui la trasformazione agisce come l'applicazione antipodale è nella direzione della coppia di vertici opposti *v*=(1,-1,1,-1) e *v′*=(-1,1,-1,1).

Queste trasformazioni sono 48, perché ci sono 8 possibili scelte per la prima direzione *v*-*v*'; fissata questa direzione, ci sono 3 possibili scelte per una direzione ortogonale *w*-*w*'; fissate queste due, è univocamente determinato il piano ortogonale su cui la trasformazione agisce come una rotazione di angolo $\pm\pi/2$ (quindi altre 2 scelte possibili per l'angolo). In conclusione 8×3×2=48. Non ci sono doppioni, anche se la coppia di direzioni *v*-*v*' e *w*-*w*' si ottiene 2 volte, perché in un caso una direzione è la direzione dei punti fissi e l'altra quella su cui la trasformazione si restringe all'antipodale, e nell'altro caso viceversa.

Naturalmente dovremmo ancora verificare che queste trasformazioni fissano l'ipercubo (sappiamo che viene fissato l'insieme degli 8 vertici che costituiscono i vertici di uno dei 2 iperottaedri, perché *w* e *w*' sono punti fissi, *v* e *v*' si scambiano, gli altri 4 ruotano in un ciclo di lunghezza 4, nell'esempio che abbiamo fatto si ha: (1,1,-1,-1)->(1,-1,-1,1)->(-1,-1,1,1)->(-1,1,1,-1)->(1,1,-1,-1)).

Per quello che riguarda il gruppo delle 48 trasformazioni in $\mathbf{E_{cc}4}$, possiamo a questo punto utilizzare quelle che abbiamo appena descritto e immaginare di comporle con una riflessione in **B1**. Ciò che si ottiene deve essere un'isometria diretta (perché le due trasformazioni che si compongono sono entrambe inverse), che fissa l'ipercubo (perché le due lo fissano), che scambia fra loro i due iperottaedri (perché la trasformazione in $\mathbf{D_c4}$ li fissa, mentre la riflessione in **B1** li scambia) e la permutazione associata alla matrice deve essere un ciclo di lunghezza 4 (perché la permutazione associata alla riflessione in **B1** è l'identità). Quindi la composizione è necessariamente una delle 48 trasformazioni in $\mathbf{E_{cc}4}$.

Allo stesso modo si possono ottenere le 24 trasformazioni in $\mathbf{D_c22}$, componendo con una riflessione in **B1** le 24 trasformazioni che già abbiamo descritto associate a un ciclo di lunghezza 2 (le 12 in $\mathbf{E_{cc}22}$ e le 12 in $\mathbf{C_r22}$) e lasciamo al lettore interessato il compito di completare i dettagli di questa discussione.

Bibliografia

[A] E. A. Abbott, *Flatlandia*, Adelphi, 1966

[C] H.S.M. Coxeter, *Complex regular polytopes*, Cambridge University Press, 1974

[D] M. Dedò, *Forme*, Decibel Zanichelli, 1999.

Pagine dal sito *immagini per la matematica* (http://www.matematita.it/materiale/):

- http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=2 (immagini 4d)
- http://www.matematita.it/materiale/?p=anim.sub3 (animazioni 4d)
- http://www.matematita.it/personali/index.php?blog=6&cat=102 (approfondimenti 4d).