

IL TELESCOPIO MENTALE: GEOMETRIE NON EUCLIDEE, ARTE E COSMOLOGIA

Silvia Benvenuti

**Scuola di Scienze e Tecnologie
Università di Camerino**



Matematica che passione, Milano, 15 marzo 2012

Quello che ci hanno sempre insegnato ...

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è uguale al
quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste una e una
sola parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è uguale a
 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è uguale al
quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste una e una
sola parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è uguale a
 180°**

**Dato un triangolo, è sempre
possibile costruirne uno *simile*
ma più grande (*omotetia*)**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è minore del
quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, esiste più di una
parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni
di un triangolo è minore di
 180°**

**Se due triangoli hanno gli stessi
angoli interni, allora hanno la
stessa area**

... dimentichiamolo per oggi!

**La somma dei quadrati
costruiti sui cateti è maggiore
del quadrato costruito
sull'ipotenusa**

**Dati una retta r e un punto P
fuori da essa, non esiste nessuna
parallela ad r passante per P**

**La somma degli angoli interni di
un triangolo è maggiore di 180°**

**Se due triangoli hanno gli
stessi angoli interni, allora
hanno la stessa area**

racconti di fate

geometrie da manicomio



la geometria non euclidea non può procurare agli studenti altro che stanchezza, vuotezza, arroganza e stupidità

elucubrazioni deliranti di un professore universitario elevate al rango di nuove verità sovrumane, per merito della sua megalomania

i geometri non euclidei hanno una comprensione oscura e menti ingannevoli, e l'insegnamento della geometria non euclidea in università e scuole darebbe origine a una razza di studenti che potrebbe compromettere la società

Libertà: l'influenza sull'arte moderna

«se si desiderasse collegare lo spazio dei pittori a qualche geometria, bisognerebbe fare riferimento ai sapienti non euclidei, meditare su certi [loro] teoremi» *Du cubisme* (1912), A. Gleizes e J. Metzinger

«Lobačevskij ha fatto esplodere l'assolutismo di Euclide. Con Gauss e Riemann egli ha distrutto il rigido spazio euclideo. Tutti gli oggetti matematici che essi hanno stabilito sono inimmaginabili e inaccessibili alla sensazione. Lo schiudersi della nuova epoca, annunciata dalla costruzione di nuovi mondi matematici, portava con sé una tentazione, e gli artisti non hanno saputo resistere alla sua forza seduttrice. [...] Noi abbiamo deciso di accettare come evidenti e necessarie le concezioni che i nostri predecessori hanno considerato come inconcepibili e che, in effetti, essi erano incapaci di concepire».

E. El Lissitzky (1830-1941)

«Un quadro è l'arte di far incontrare due linee, di cui si constata geometricamente il parallelismo, su una tela, davanti ai nostri occhi, nella realtà di un mondo trasfigurato che segua nuove condizioni e possibilità»

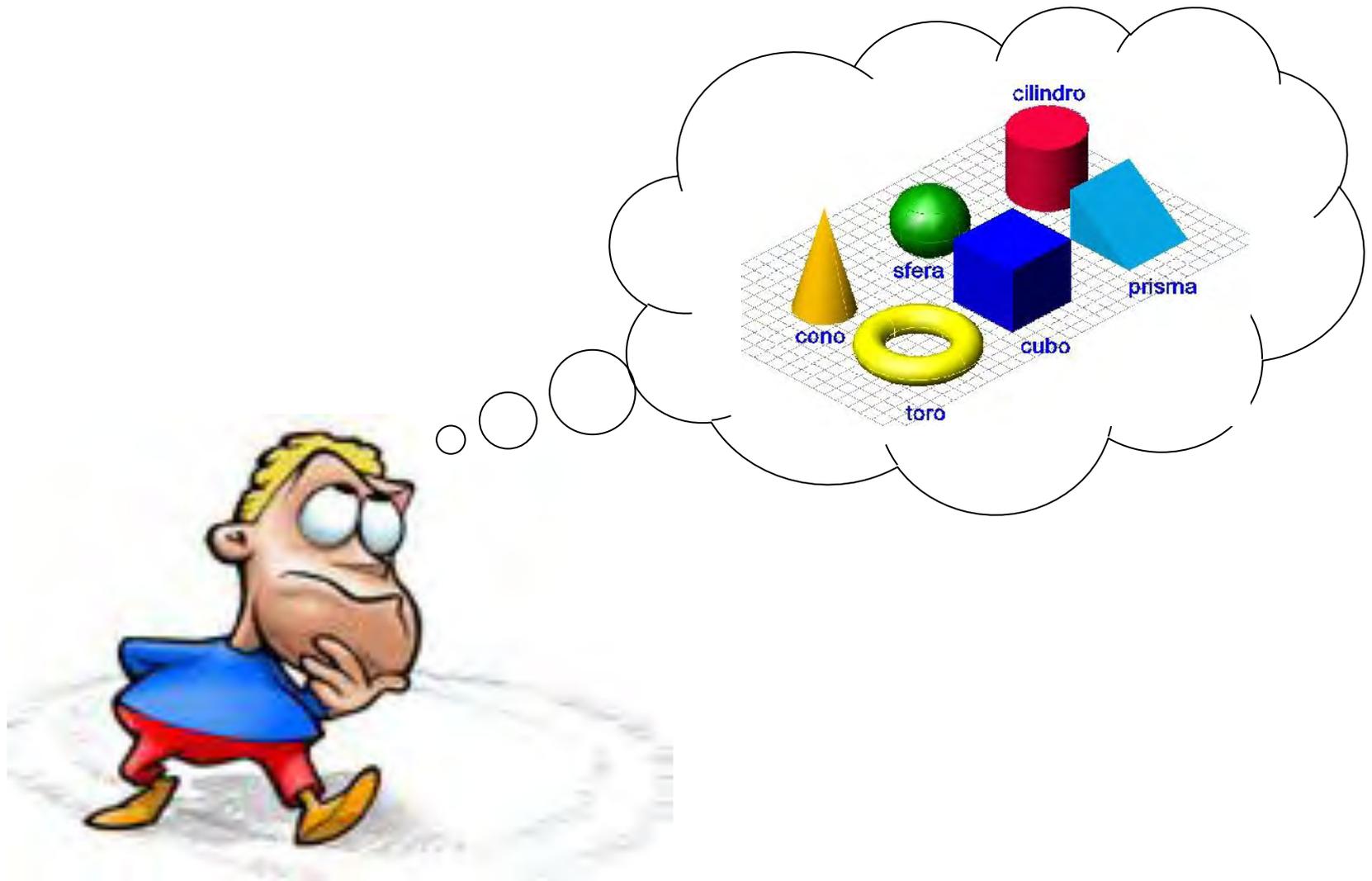
T. Tzara (1896-1963)

Pelham Grenville Wodehouse, Herbert George Wells, Oscar Wilde, Joseph Conrad, Ford Madox Ford, Marcel Proust, Gertrude Stein

Alexander Scriabin, Edgar Varèse, George Antheil

«La matematica è la scienza della *libertà*: la geometria non euclidea è nata non per misurazioni, ma sulla base della libera scelta umana di negare in maniera non distruttiva».

Imre Toth



La costruzione di *una* geometria



La costruzione di *una* geometria



- Oggetti (termini, enti primitivi)
- Regole di base (assiomi, postulati)

Geometria = tutte le affermazioni, riguardanti gli oggetti, che si possono ottenere tramite deduzioni logiche a partire dalle regole di base (proposizioni, teoremi)

Molte geometrie



Molte geometrie



Molte geometrie



- Geometria *euclidea*
- Geometria *neutrale*
- Geometria *iperbolica*
- Geometria *ellittica*
- Geometria *proiettiva*
- Geometria *della gomma*
- ...

La matematica è un'opinione???



La geometria *euclidea* (dimensione 2)

- Oggetti: punto, linea, superficie,
retta, angolo, triangolo, quadrilatero, circonferenza, ...
- Regole di base:
 - I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;
 - II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;
 - III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;
 - IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r ,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r

Le geometrie *non euclidee*

- Oggetti: gli stessi della geometria euclidea (punto, linea, ...)
- Regole di base:
 - I. Che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto a ogni altro punto;
 - II. E che una retta terminata (=finita) si possa prolungare continuamente in linea retta;
 - III. E che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro e ogni distanza;
 - IV. E che gli angoli retti siano uguali fra loro;

+

un postulato che neghi il V postulato euclideo

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r ,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r

Playfair

N1

N2

Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
esiste più di una retta passante
per P e parallela ad r

Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
non esiste nessuna retta
passante per P e parallela ad r

Dati una retta r e un punto P non appartenente ad r ,
esiste una e una sola retta passante per P e parallela ad r

Playfair

N1

N2

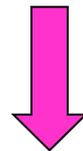
Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
esiste **iperbolikós** una e una sola retta
passante per P e parallela ad r

Data una retta r e un punto P
non appartenente ad r ,
non esiste **elleiptikós** nessuna retta
passante per P e parallela ad r

Coerenza logica e modellizzazione

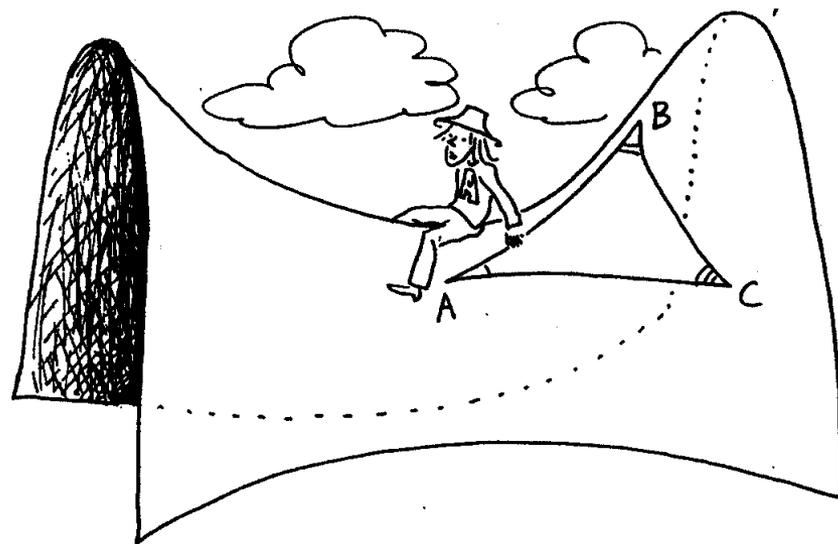
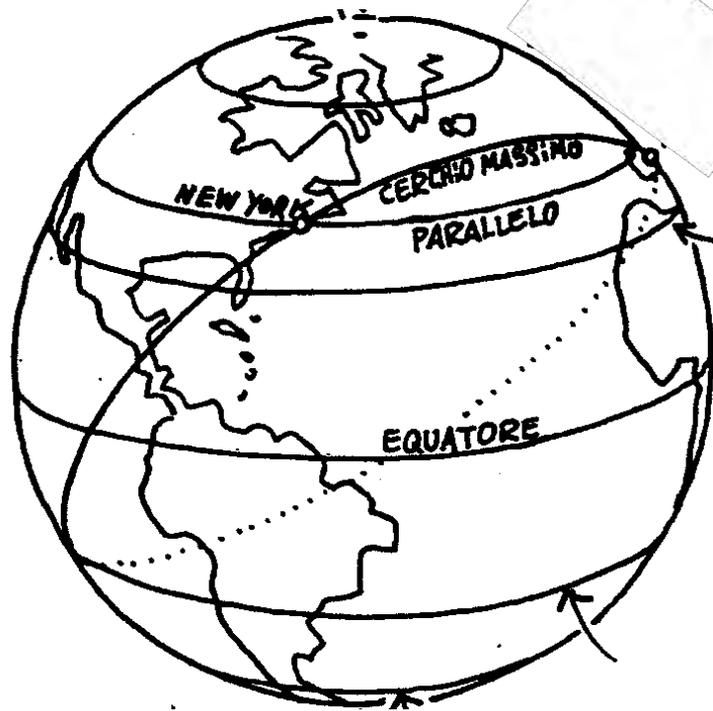
Costruire dei modelli di geometria non euclidea all'interno di quella euclidea:

1. interpretare gli enti primitivi della geometria non euclidea in termini degli enti primitivi di quella euclidea;
2. tradurre gli assiomi della geometria non euclidea nei corrispondenti enunciati euclidei;
3. dimostrare che gli enunciati euclidei così ottenuti sono tutti teoremi validi.

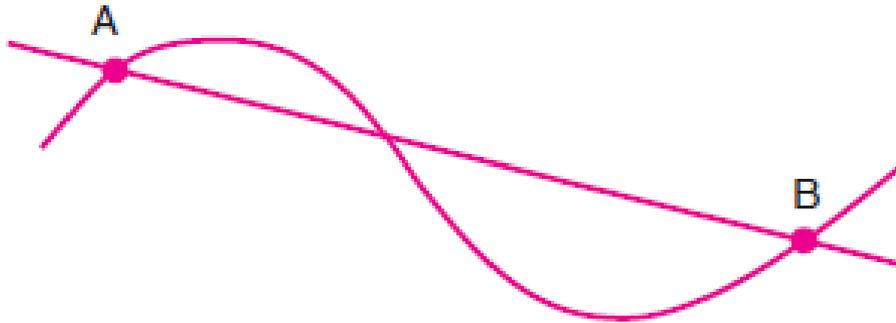


la coerenza del sistema modellizzato segue immediatamente da quella del sistema “ospite”

Coerenza logica e modellizzazione

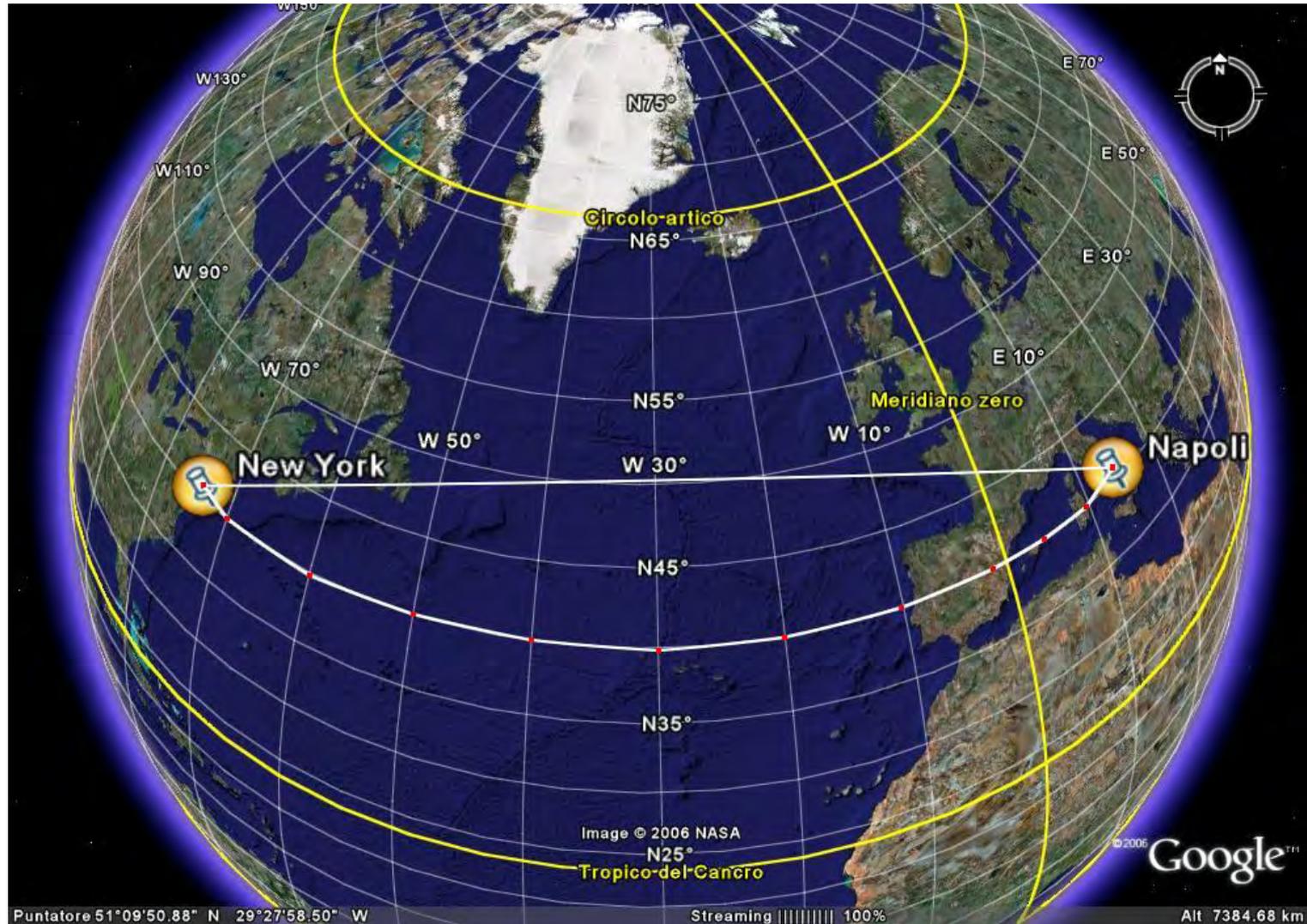


Che cos'è un segmento? Che cos'è una retta?

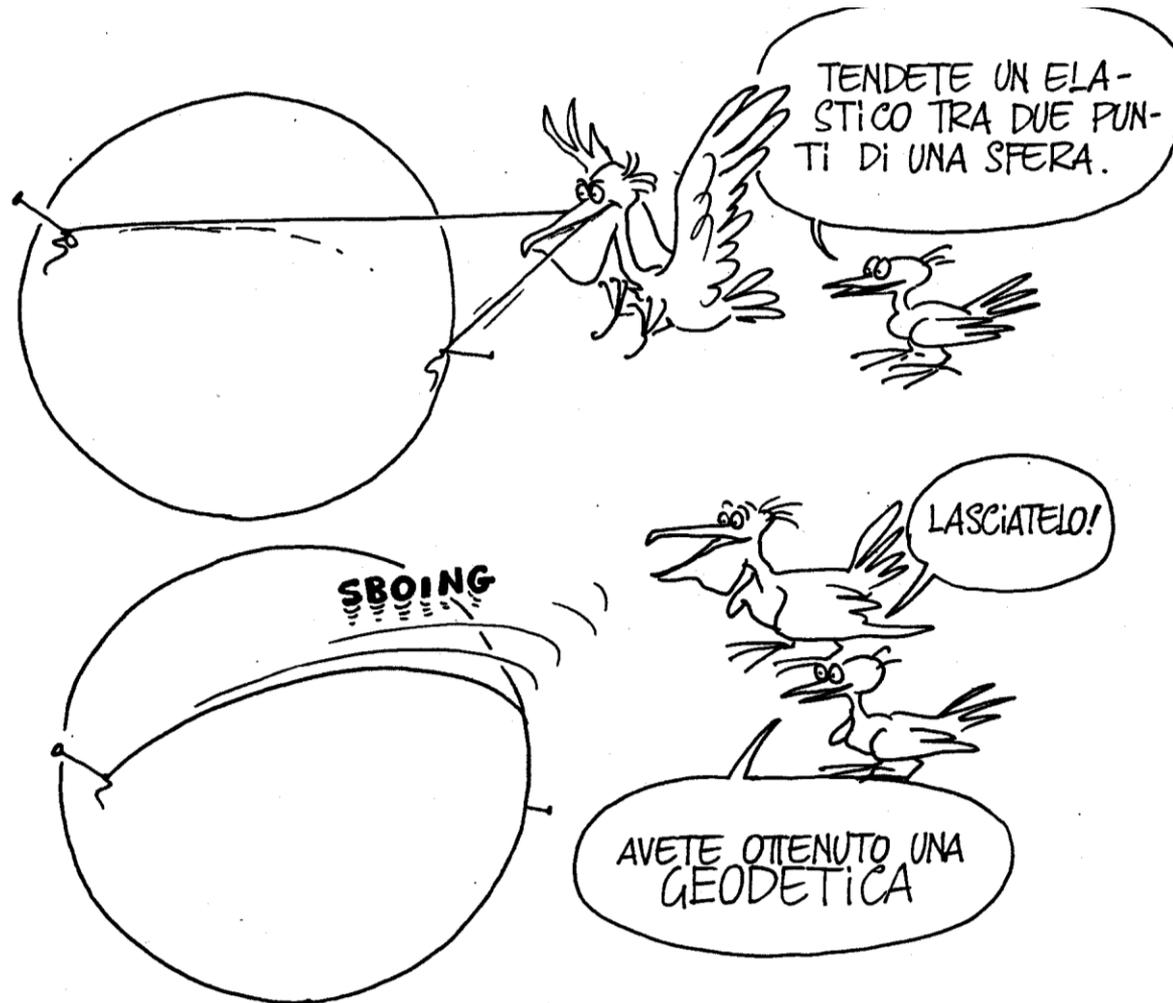


Segmento AB = il più breve tra tutti i percorsi che congiungono A e B

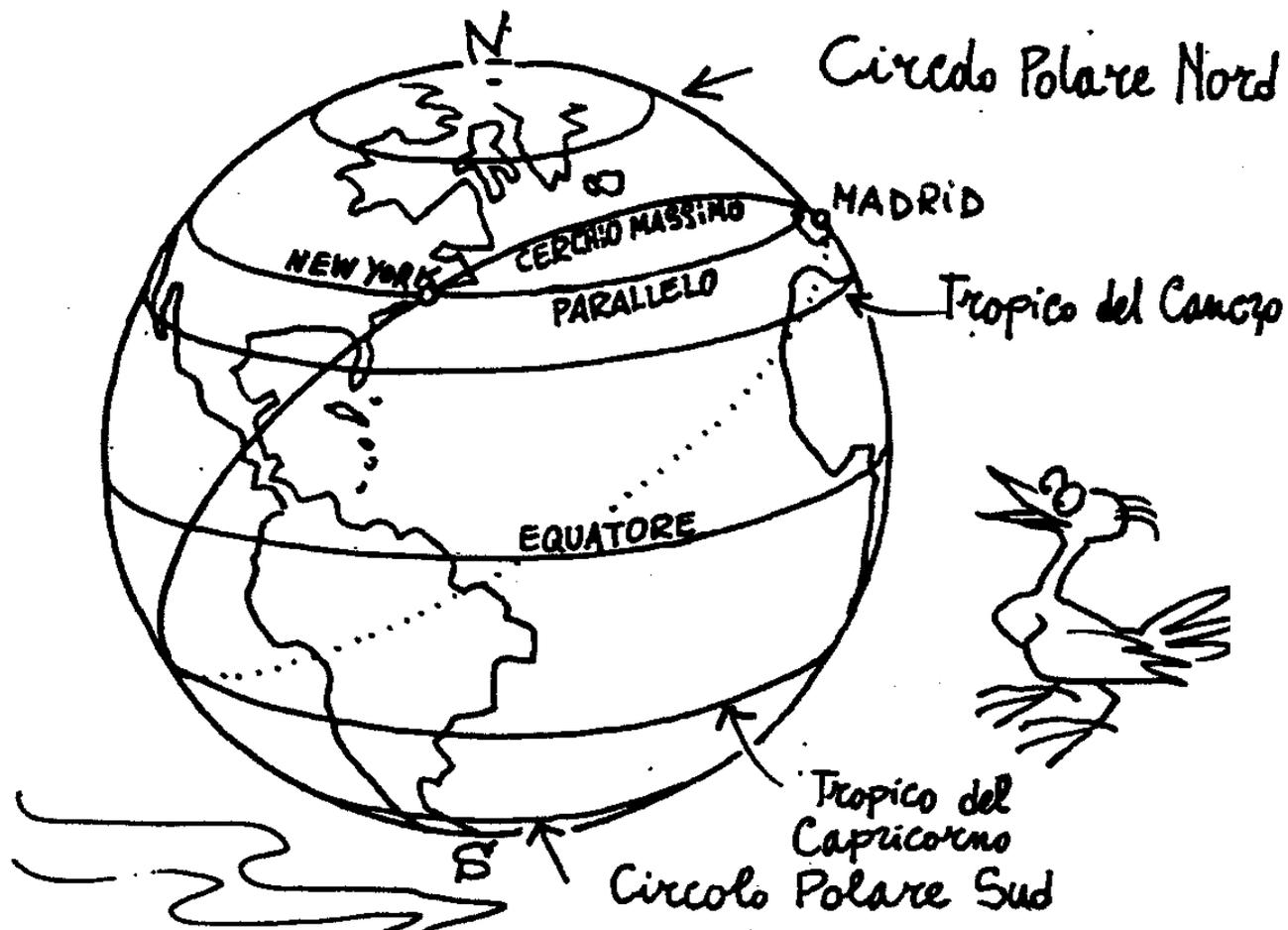
Le rette del mappamondo



I segmenti del mappamondo



Segmenti e rette del mappamondo



Fare geometria sul mappamondo (S^2)

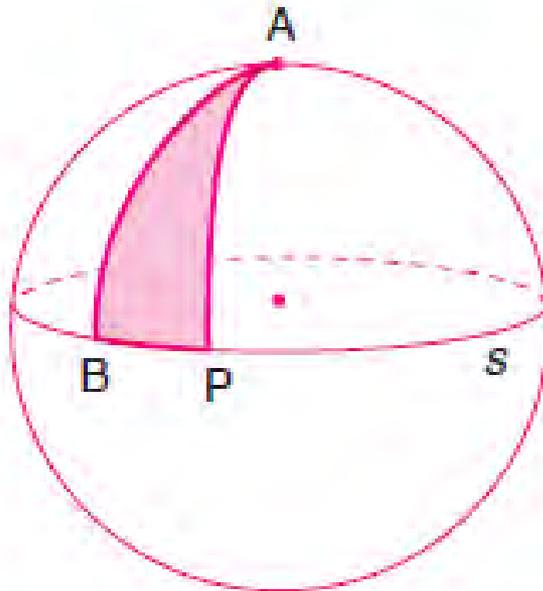
1. Per due punti non antipodali di S^2 passa sempre una e una sola retta, mentre per due punti antipodali passano infinite rette;
2. Su S^2 non esistono rette parallele, perché due rette qualunque hanno sempre due punti in comune;
3. Le rette di S^2 sono curve chiuse e hanno tutte la stessa lunghezza finita.

Geometria dello sputo

Fra le mostruosità più grandi che questo matematico minore che fu Riemann ha messo al mondo, quella di una linea perfettamente diritta e chiusa in sé è forse la più spassosa. [...]

Una delle conseguenze peggiori di questa geometria è il pericolo che si corre se si sputa in linea retta davanti a sé: si rischia infatti che lo sputo vi ricada addosso!

Triangoli gonfi



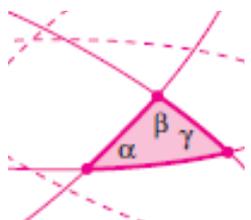
La somma degli angoli di un triangolo sferico è maggiore di 180°

e

Tale somma non è costante, come in geometria euclidea,
ma varia al variare del triangolo

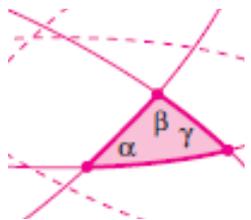
Base · altezza : 2 ???

Teorema dell' **eccesso** di Gauss:

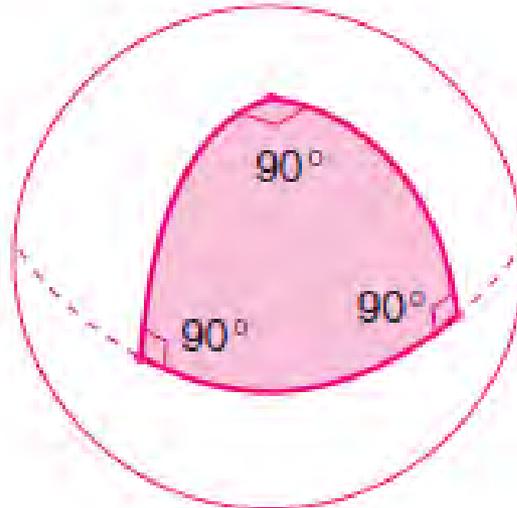
$$\text{Area} \left(\text{triangolo} \right) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$
A diagram of a spherical triangle on a sphere. The triangle is shaded in pink. Its three interior angles are labeled with the Greek letters alpha (α), beta (β), and gamma (γ). Dashed lines extend from the sides of the triangle to show the great circles on the sphere's surface.

Niente omotetie!

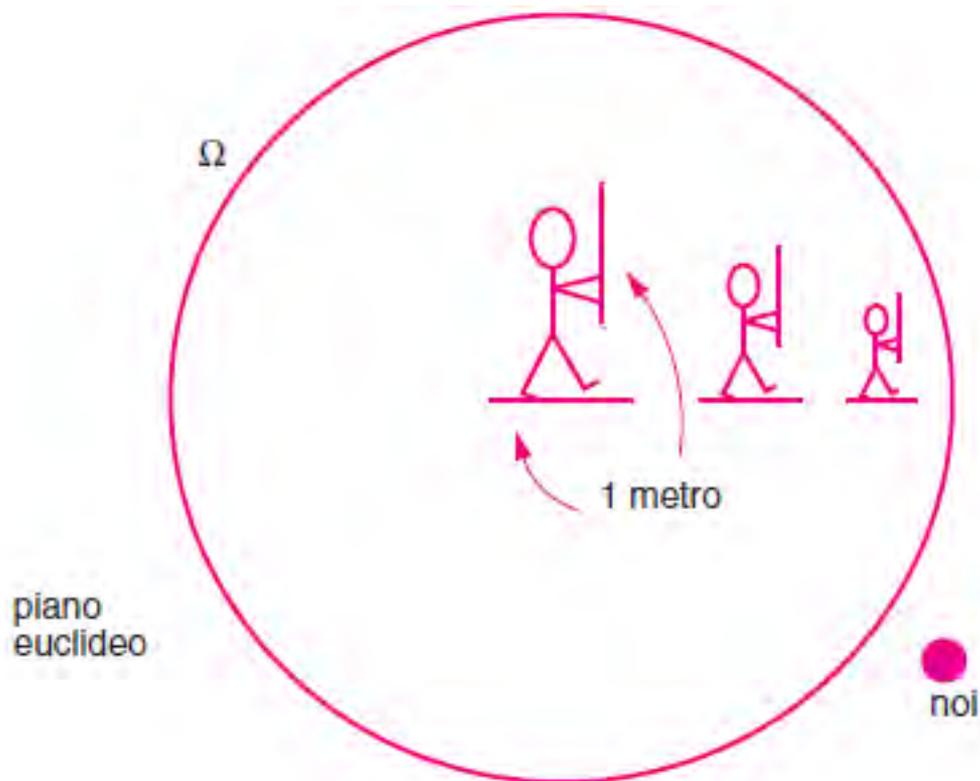
Teorema dell' **eccesso** di Gauss:

$$\text{Area} \left(\text{triangolo} \right) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$


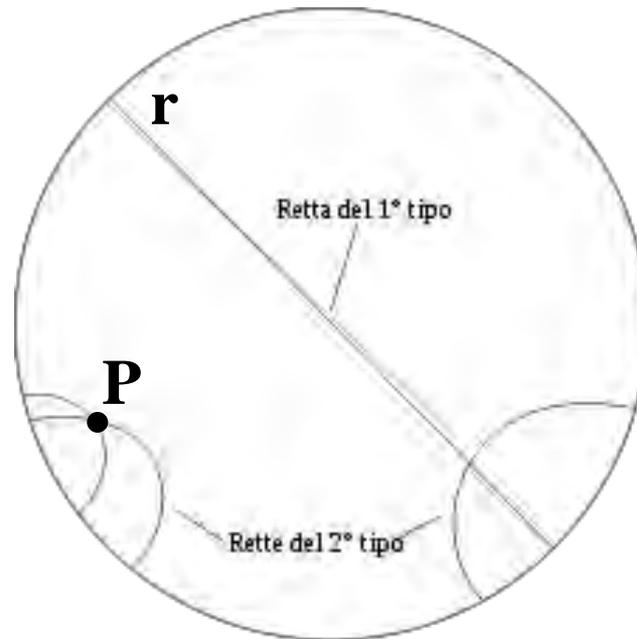
E Pitagora?



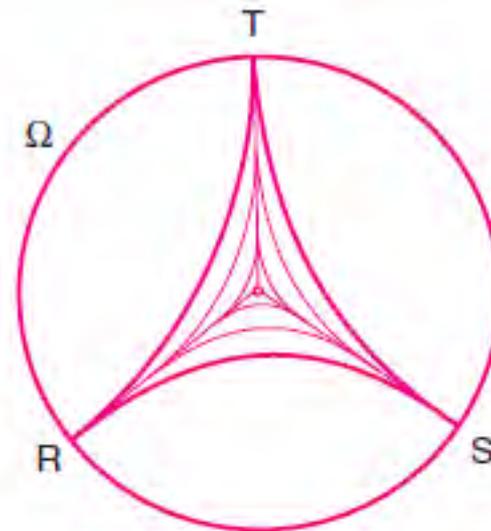
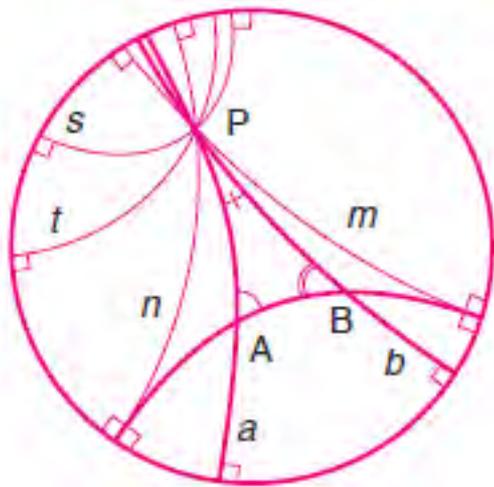
Geometria *iperbolica*: l'omino e il suo mondo di gas



Rette iperboliche



Triangoli sgonfi



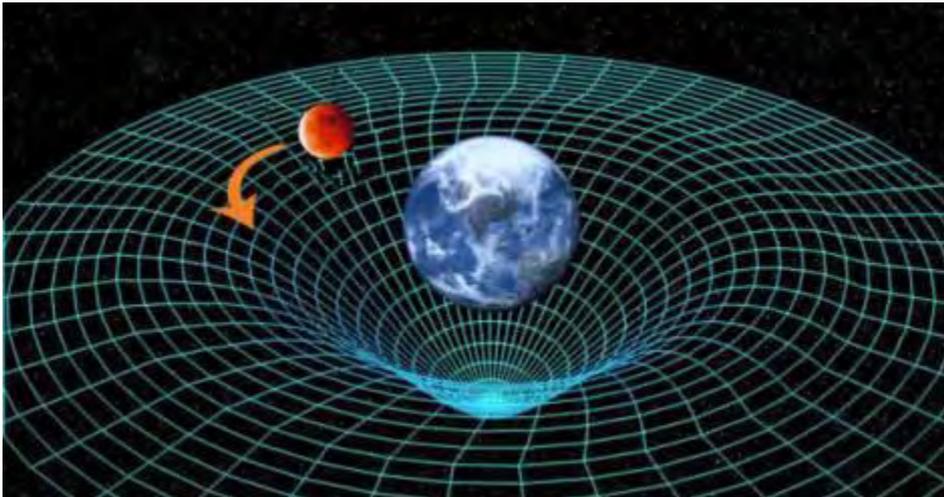
Arte iperbolica: Escher

A cosa serve tutto ciò???

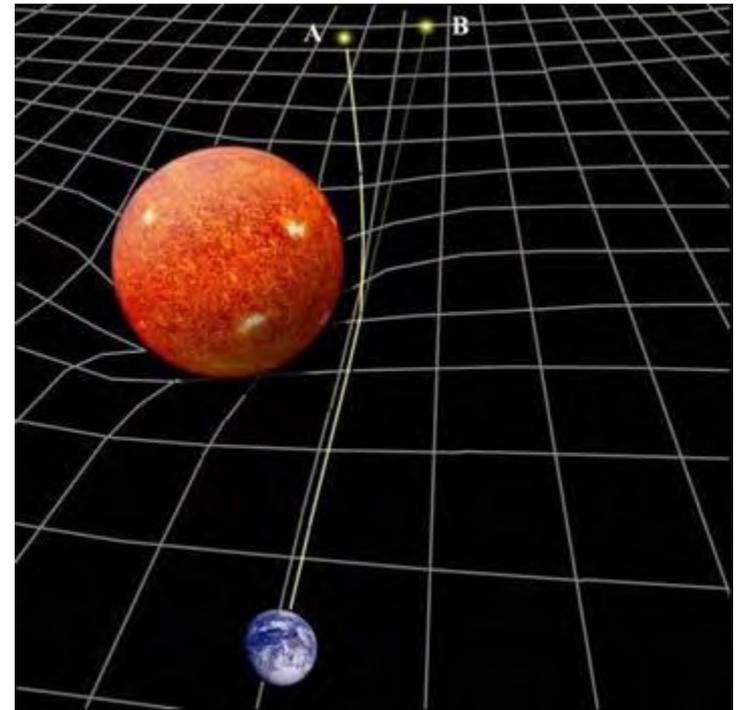
Il telescopio mentale



Einstein: la gravità è geometria



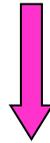
la presenza di massa ed energia
curva lo spazio



Forma dell'universo a grande scala: possibili soluzioni delle equazioni della relatività generale

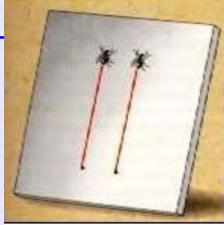
Principio cosmologico: l'universo a grande scala è omogeneo e isotropo

tensori energia - impulso = funzioni del tensore di Ricci



- 1) l'universo non è statico ma si evolve, cambiando le sue dimensioni nel tempo (contraendosi o dilatandosi);
- 2) la geometria dell'universo a grande scala è curva e l'usuale geometria euclidea è solo un caso particolare tra le ∞ geometrie non euclidee che si ottengono come soluzioni delle equazioni.

Densità critica, forma e destino dell'universo

| | geometria | prototipo | Destino |
|--|------------------|---|---|
| densità universo = densità critica | euclidea |  | espansione che rallenta e termina dopo un tempo infinito (cioè mai) |
| densità universo < densità critica | iperbolica |  | espansione infinita |
| densità universo > densità critica | ellittica |  | fine dell'espansione e collasso (big crunch) |

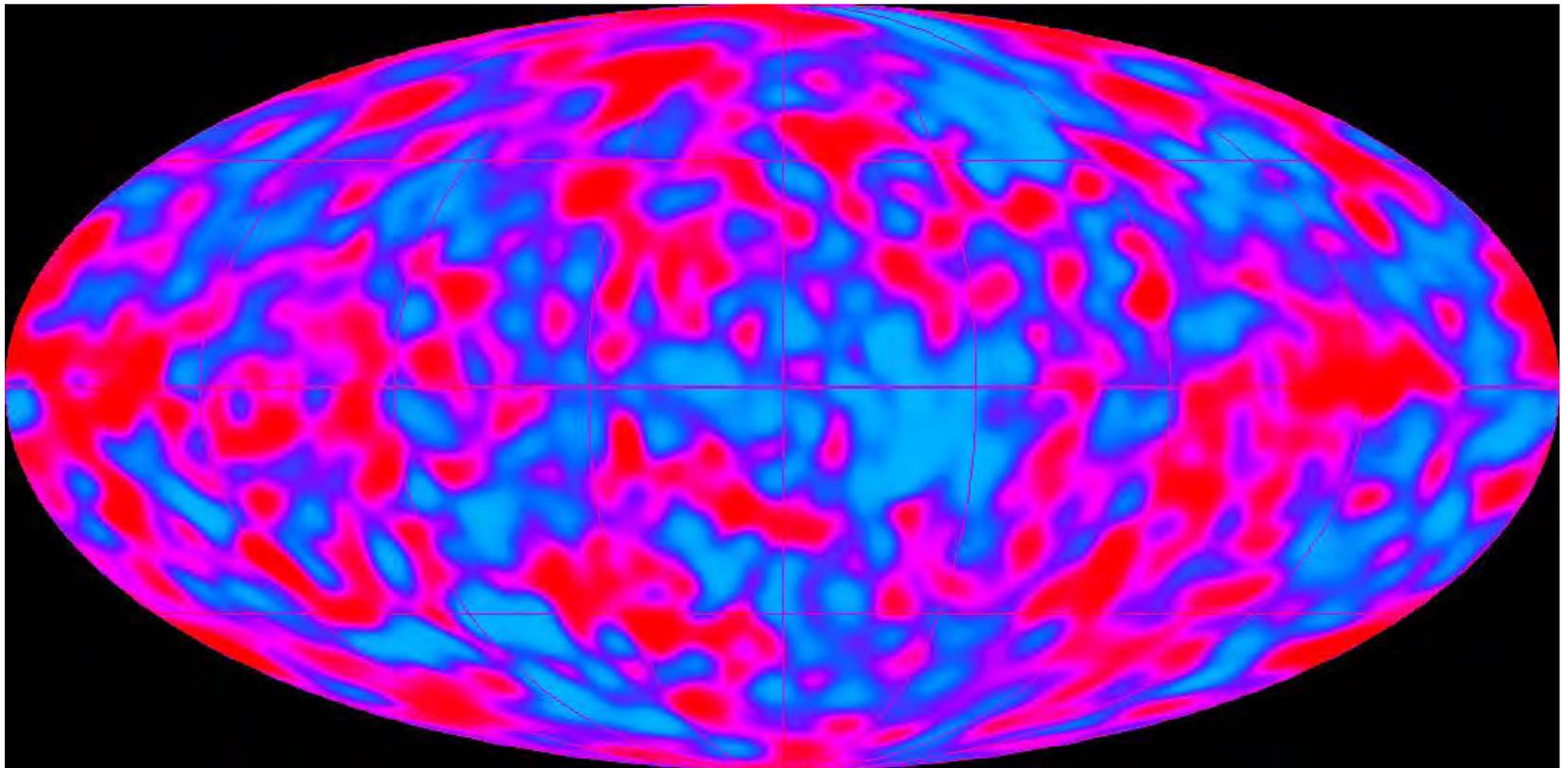
Il problema dell'inventario

$$d_c = (1,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

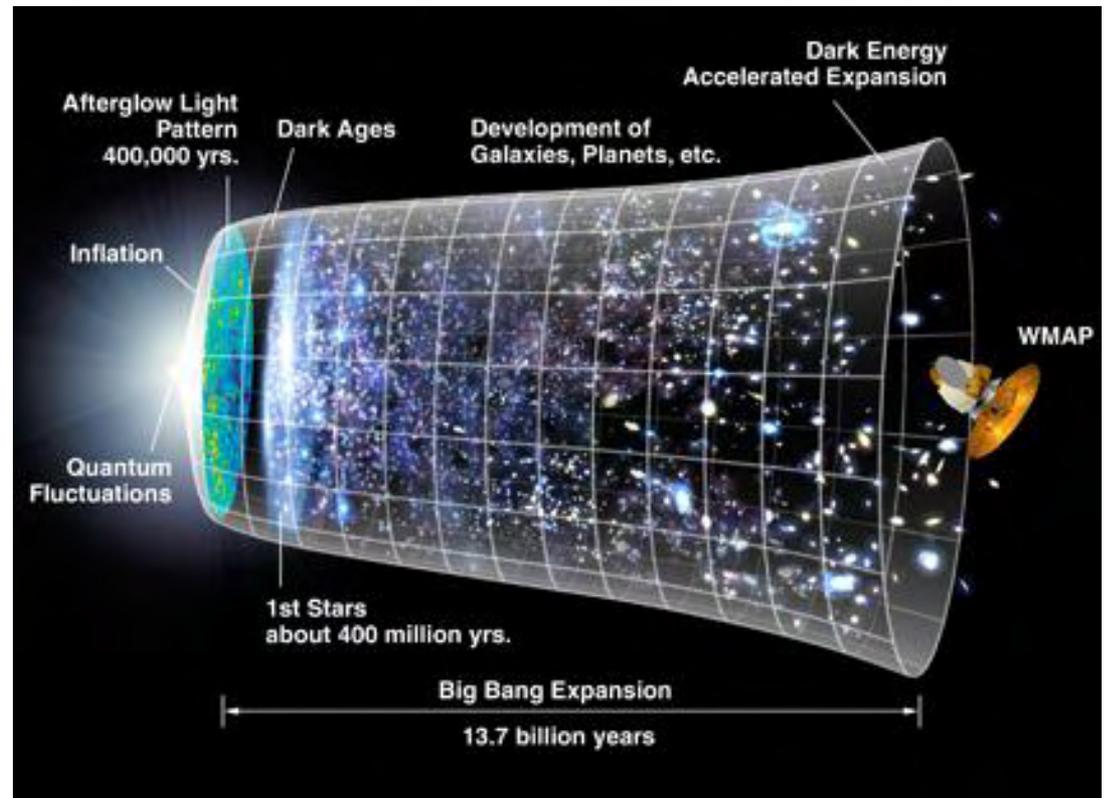
Materia oscura

Energia oscura

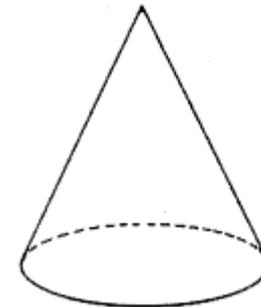
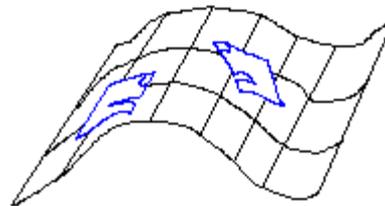
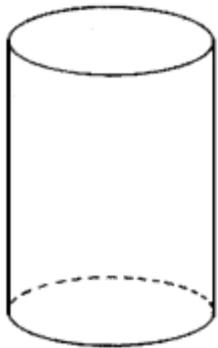
Telescopio o macchina del tempo?



BOOMERANG, MAP e gli altri: l'universo è piatto?



È euclideo ... ma che forma ha???

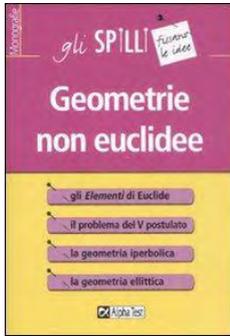


Dalle recenti osservazioni sperimentali

...



Bibliografia



GEOMETRIE NON EUCLIDEE, *Silvia Benvenuti*, Alpha test, Gli Spilli.

DIMENTICARE EUCLIDE?, *Silvia Benvenuti*, Linx Magazine n.08/2011, p. 16-23.

LE GNE E LA FORMA DELL'UNIVERSO, *Silvia Benvenuti*, <http://linxedizioni.it/>.

INSALATE DI MATEMATICA 3. SETTE VARIAZIONI SU ARTE, ARCHITETTURA E DESIGN, *Silvia Benvenuti*, Sironi.

IL GEOMETRICON, *Jean-Pierre Petit*, www.matematica.it/tomasi/il_geometricon.pdf

POESIA DELL'UNIVERSO. L'ESPLORAZIONE MATEMATICA DEL COSMO, *Robert Osserman*, Tea.



THE FOURTH DIMENSION AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRY IN MODERN ART, *Linda Henderson*, MIT Press.

NO! LIBERTÀ E VERITÀ, CREAZIONE E NEGAZIONE, *Imre Toth*, Bompiani.

