(slide 1)

I modelli nella comunicazione: a scuola, ma non solo (M. Dedò)

Convegno MATh.en.JEANS - Eccellenza e recupero - aprile 2011

(*Questa traccia va letta in parallelo alla visione delle diapositive*)

(slide 2)

Vorrei cominciare da qualcosa che in genere pubblicamente non faccio mai – anche se non sono mancate in questi anni occasioni che si sarebbero prestate a farlo – e cioè voglio cominciare ricordando mio padre, il prof. Modesto Dedò; e questo ricordo vuole insieme essere un riconoscimento esplicito di qualcosa che già è sicuramente molto chiaro e manifesto – perlomeno a chi ha avuto modo di conoscerlo – e cioè il fatto che una delle radici di tutto il lavoro che abbiamo fatto qui in questi anni è proprio in mio padre, in quello che ha fatto, e ancor di più nel suo gusto e nel suo modo di intendere la matematica e l'insegnamento della matematica.

Sono diversi i motivi per cui mi è sembrato che l'occasione di oggi si prestasse particolarmente a questo ricordo. Innanzitutto un motivo del tutto contingente e casuale, cioè il fatto che giusto la settimana scorsa ricorreva il ventesimo anniversario dalla sua morte. Poi il fatto che siamo qui, in questo dipartimento, per un convegno diretto agli insegnanti e al mondo della scuola, e – come ben sa chi l'ha conosciuto – mio padre è stata una persona che a questo dipartimento ha dato tantissimo, come anche tantissimo ha dato, senza risparmiarsi, agli insegnanti e al mondo della scuola.

Ma c'è una terza ragione, anche più intrinseca, per ricordarlo in occasione di questo convegno, ed è una ragione legata proprio al tema dei modelli che abbiamo voluto porre al centro di questa giornata. Di nuovo, credo che chi ha avuto occasione di conoscerlo non si stupirà di questa associazione del suo nome a questo tema. E volevo qui ricordare due aspetti in particolare; da un lato la capacità di "leggere" la matematica (e individuare quindi un modello) ovunque e in qualunque circostanza (anche, giusto per fare un esempio, nel decidere se osservare lati o angoli quando c'è da capire chi vince il punto nel giocare a bocce…); ma, soprattutto, quello che volevo qui ricordare è la particolare sensibilità didattica che lo rendeva capace di "fiutare" quando una data situazione concreta potesse offrire uno spunto per raccontare qualcosa di matematica, o, piuttosto, per porre un problema (didatticamente significativo). E chiunque abbia provato a insegnare sa bene quanto un bagaglio di spunti "concreti" e significativi possa essere un aiuto prezioso nel mestiere di insegnante.

Voglio ricordare qui solo uno dei suoi lavori, e cioè la traduzione dello SMP[1]; l'elemento di rottura dello SMP rispetto ai testi italiani dell'epoca era proprio l'attenzione ai modelli (non era usuale allora – e in realtà nemmeno ora – che un testo di scuola media spingesse ragazzi di 12 anni a confrontarsi con il problema, per esempio, dell'efficienza dei diversi possibili sistemi di riscaldamento di un ambiente); e per questo lo voglio ricordare qui in questo convegno: il tema che ci proponiamo di discutere non nasce dal nulla, ma ha una storia. Il progetto SMP, oltre alla traduzione, prevedeva una serie di corsi e di incontri per farlo conoscere agli insegnanti: ma questo secondo stadio non ha mai avuto luogo e un enorme lavoro (la traduzione di 10 volumi, i primi 5 e le relative guide per l'insegnante) è stato letteralmente gettato al macero. E questo (di chiunque siano state le responsabilità, cosa su cui non voglio e comunque non potrei entrare) è stato sicuramente un peccato, e un'occasione mancata: vien voglia di chiedersi se gli esiti delle prove Pisa e Invalsi di cui oggi ci lamentiamo sarebbero stati gli stessi se alcune tipologie di problemi fossero entrate, e diventate "normali", nella scuola 30 anni fa.

(slide 3-4)

Si usa la parola *modello* con molti diversi significati, che si possono raggruppare in due filoni:

- si parte da un concetto matematico e si cerca nel mondo reale qualcosa che possa rappresentare questo concetto;
- si parte da una situazione del mondo reale che si vuole studiare, e se ne costruisce un modello matematico.

Nel seguito parlerò quasi esclusivamente del primo filone.

(slide 5-6)

Siamo talmente abituati a confondere il modello concreto con il concetto astratto che rappresenta (quando conosciamo tale concetto) che non abbiamo esitazioni a dire che "è un cubo" qualcosa che ovviamente un cubo non è, ad esempio un modellino dello scheletro di un cubo in cui i vertici sono addirittura delle sferette[2] di diametro più di 1 cm.

(slide 7-8)

Una parentesi per porre il seguente problema. Dimostrare che è possibile trovare otto persone tali che: 1) ognuna ne conosca esattamente altre tre; 2) non si possano trovare tre

[1] School Mathematics Project: si tratta di un testo inglese per la scuola secondaria (destinato ai ragazzi tra gli 11 e i 18 anni) che l'UMI aveva deciso di far tradurre e far conoscere agli insegnanti italiani, agli inizi degli anni '70.

[2] Ci si riferisce qui a un modello costruito con lo Zome Tool.

di queste otto persone che si conoscano tutte, due a due; 3) sia possibile invece trovare quattro di queste otto persone, che, a due a due, non si conoscono. (E si potrebbe naturalmente aumentare le condizioni, o fare delle variazioni sul tema…). Anche questo problema rappresenta, in un certo senso, un modello di cubo (e magari anche, pensando al punto 3), di un tetraedro inscritto nel cubo…).
E allora ci si pone davvero la domanda: "Ma che cos'è il modello di un cubo?"

(slide 9)
Posto che è chiaro che il modello di un cubo *non* è un cubo, non è chiaro però come possiamo definire un modello. La "definizione" da cui vorrei partire è qualcosa che fa naturalmente rizzare i capelli in testa ai matematici (e non solo ai matematici!), ovvero:
il modello di un cubo è *qualcosa* in cui *qualcuno* in *qualche* momento della sua vita ha riconosciuto l'idea astratta di un cubo.

(slide 10)
Una conseguenza (un po' impressionante) di questa "definizione" è che non solo persone diverse possono vedere concetti astratti diversi in uno stesso modello, o possono vedere lo stesso concetto in modelli diversi, ma addirittura la stessa persona può, in tempi diversi, ritrovarsi o non ritrovarsi nell'identificare un dato concetto astratto in un dato modello.
Sembra quindi esattamente l'opposto di quello che vorremmo chiamare "definizione", eppure… è proprio questo ciò che succede!
A titolo di esempio, riporto il caso dell'archivio *Immagini per la matematica*[3]: più di una volta mi è successo, leggendo una didascalia a distanza di mesi, di non ritrovarmi d'accordo con chi l'aveva scritta (cioè con me stessa) nella sottolineatura di come l'immagine rappresentasse un dato concetto.

(slide 11-12)
A prima vista la situazione che deriva dall'uso dei modelli nella comunicazione può sembrare talmente caotica e ambigua da far venir voglia di rinunciare completamente al loro uso. Tuttavia occorre riconoscere che l'uso dei modelli è prezioso nella comunicazione per "dare l'idea" di un dato concetto astratto.
Riporto un esempio, nato dalla mostra *Simmetria, giochi di specchi*: una camera di specchi suggerisce fortemente l'impressione di infinito, e in realtà suggerisce un concetto abbastanza "corretto" di infinito (ben diverso dall'uso della parola "infinito" quale

[3] http://www.matematita.it/materiale/index.php

sinonimo di “moltissimi”, che spesso si ritrova nel linguaggio comune). In effetti la sensazione di “vedere l’infinito” non deriva tanto dal numero di immagini che si vedono (numero che dipende essenzialmente dalla pulizia degli specchi, e comunque è abbastanza basso, certo inferiore a poche decine) quanto piuttosto dalla regolarità con cui si ripetono le immagini; è questa regolarità che ci fa pensare che quella data immagine non possa essere l’ultima perché “sappiamo come lo schema va avanti”.

È stato proprio il rendersi conto di come veniva percepito l’infinito nelle camere di specchi che ci ha dato l’idea di utilizzare un caleidoscopio (basato sul triangolo sferico di angoli 90°, 60°, 45°) e una camera di specchi triangolare (basata sul triangolo piano di angoli 90°, 60°, 30°) per “raccontare” il confronto di infiniti.

Si parte nel caleidoscopio, inserendo ad esempio un mattoncino che fa vedere un cubo e che abbia nella faccia visibile (corrispondente a 1/8 della faccia di un cubo) tre pallini colorati: uno rosso in corrispondenza di un vertice del cubo, uno bianco in corrispondenza del centro della faccia, uno giallo in corrispondenza del punto medio dello spigolo. Si può chiedere quanti sono i pallini rossi (o bianchi, o gialli), e si tratta di una domanda ricca, perché porta a riconoscere tutta la simmetria del cubo; ma si può anche chiedere solo se sono di più i pallini di un colore o dell’altro, e in tal caso basta accorgersi che in ogni triangolo c’è un pallino di ciascun colore; si individua quindi una corrispondenza biunivoca fra pallini di colore diverso e ci si può poi accorgere che questa ha senso anche in una situazione, come quella generata nella camera di specchi, in cui i pallini sono infiniti. E si è così introdotta in maniera naturale l’idea di utilizzare una corrispondenza biunivoca per confrontare due infiniti!

(slide 13-14)

L’uso di modelli può dare una sicurezza nella comprensione di un concetto astratto, che molto difficilmente si ottiene restando su un piano esclusivamente formale. Si può ricordare come si usi la locuzione “Lo vedo” per indicare il fatto che si è capito qualcosa e lo si è capito in pieno; o si può confrontare la definizione astratta di qualcosa (per esempio il quoziente dell’azione di un gruppo su uno spazio topologico) con la visione di un filmato che rappresenta come il “timbro” (cioè l’*orbifold*) ottenuto con questo quoziente può ricostruire il disegno da cui si è partiti (che individuava il gruppo di simmetria). È evidente che la comunicazione informale, attraverso il modello del filmato, non può sostituire la definizione astratta e formalizzata; è però un elemento prezioso per dare significato a quest’ultima.

(slide 15-16-17)

Parlando di modelli è opportuno fare una distinzione fra due tipi di comunicazione: quella paritetica e quella non paritetica. La prima è quella tipica di due matematici che discutono di un problema di ricerca; ma può essere anche la comunicazione fra due studenti che discutono di un problema. Cfr. Wu *The Mis-Education of Mathematics Teachers* in Notices of the AMS, http://www.ams.org/notices/201103/ .[4]

Non si tratta di un tipo di comunicazione "normale" nella scuola (dove è preponderante la comunicazione non paritetica insegnante-studente); ed è proprio per questo che è compito dell'insegnante cercare occasioni per questo tipo di comunicazione (e le proposte per la scuola del Centro *matematita*, dai giochi *on line*,[5] ai laboratori,[6] al progetto MATh.en.JEANS,[7] vanno proprio in questa direzione).

In una comunicazione paritetica, in cui le idee si costruiscono insieme, l'uso dei modelli è prezioso e a volte è proprio l'ambiguità intrinseca a ogni modello che può costituire un fattore positivo, perché aiuta l'associazione di idee e quindi può favorire quello "scatto" che porta alla comprensione di un concetto astratto.

(slide 18-19)

Il resoconto di un'insegnante di scuola primaria circa la maniera di porsi di fronte a un problema da parte dei bambini di una prima elementare è abbastanza impressionante, perché ricalca i passaggi chiave di ciò che fanno i matematici in un'attività di ricerca.

(slide 20)

È assai più pericoloso l'uso di modelli in una situazione di comunicazione non paritetica, come può essere nel dialogo fra un insegnante e i suoi studenti, oppure in una mostra diretta al grande pubblico.

In casi come questi, per tenere sotto controllo i rischi che intrinsecamente si pongono, occorre avere sempre ben presente il fatto che uno dei due "estremi" del dialogo ha già

---

[4] *In their routine grappling with new ideas, mathematicians need to know, for survival if nothing else, the intuitive meaning of a concept perhaps not yet precisely formulated and the motivation behind the creation of a particular skill, and to have a vague understanding of the direction they have to pursue. These needs completely parallel those of students in their initial attempt to learn something new. This part of a research mathematician's knowledge would surely shed light on students' learning processes.*
Quando è alle prese con una nuova idea, il matematico ha bisogno, non foss'altro che per sopravvivenza, di poter usare un concetto a livello intuitivo, anche prima che sia stato formulato in modo preciso e rigoroso, così come ha bisogno di avere una comprensione sia pur vaga della direzione in cui sta andando, e delle motivazioni che lo spingono a quella scelta. Questi bisogni sono del tutto analoghi a quelli degli studenti nei loro primi tentativi di imparare qualcosa di nuovo. E questa parte della conoscenza di un ricercatore in matematica getta sicuramente luce sui processi di apprendimento degli studenti.

[5] Vedi http://www.quadernoaquadretti.it/giochi/

[6] Vedi http://specchi.mat.unimi.it/users/specchi/notizie_labs.htm e http://specchi.mat.unimi.it/matematica/index.html

[7] Vedi http://www.mathenjeans.it/

chiaro in testa il concetto astratto che vuol rappresentare con quel dato modello, mentre l'altro non ce l'ha. E questo può creare delle incomprensioni e degli equivoci, di cui è importante essere consapevoli.

(slide 21-22-23)

Un esempio: un modello di nastro di Moebius non sarà mai un "vero" nastro di Moebius, perché un "vero" nastro di Moebius è una superficie, e come tale non ha spessore. Paradossalmente, chi già sa che cos'è un nastro di Moebius sembra assolutamente non accorgersi dell'esistenza di uno spessore in un dato modello concreto (probabilmente perché "vede" nel modello direttamente il concetto astratto che già conosce); nel momento in cui glielo si fa osservare, naturalmente respinge l'oggetto come modello di un nastro di Moebius, indipendentemente dall'entità di questo spessore. Ciò è evidentemente corretto dal punto di vista matematico (se diciamo che non è un nastro di Moebius perché ha uno spessore, questo è vero sia se lo spessore è di 10 cm sia se questo è di un micron!), però è utile essere consapevoli che dal punto di vista comunicativo le cose stanno diversamente. Per la persona che non ha già in testa un concetto astratto di nastro di Moebius e che vogliamo se lo crei a partire dai modelli che facciamo vedere, non è affatto indifferente se questo spessore è piccolo (al punto da essere trascurabile) oppure no.

(slide 24-25-26-27)

Concludendo: un buon modello per una comunicazione NON paritetica (in una mostra o in una scuola) deve essere:

- semplice; cercare di trasmettere nello stesso modello troppe informazioni equivale spesso a raggiungere l'effetto di nessuna informazione;
- riconoscibile da molti;
- leggibile a livelli diversi di interpretazione, in modo che a ogni livello si possa aggiungere qualche informazione (senza cancellare le informazioni del livello precedente).

E, per avere qualche *chance* di raggiungere questi obiettivi, occorre in primo luogo saper ascoltare.