Un quadretto in più o in meno

QUESITO 1
Se scomponiamo un quadrato costituito da 64 quadratini (figura 1) e lo ricomponiamo sotto forma di rettangolo (come in figura 2), questo occupa una superficie di 65 quadratini. Come mai?

QUESITO 2
Se scomponiamo lo stesso quadrato costituito da 64 quadratini come fatto nel quesito 1, possiamo utilizzare questi pezzi per comporre una figura che occupa una superficie di 63 quadratini (figura 3). Come mai?

QUESITO 3
Se scomponiamo un triangolo in quattro pezzi, come in figura 4, e lo ricomponiamo cambiando la disposizione dei pezzi, ci accorgiamo che manca un quadratino. Come mai?

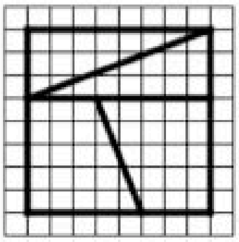


Figura 1

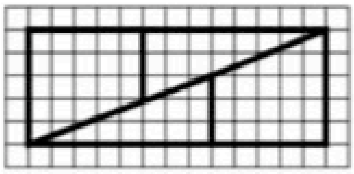


Figura 2

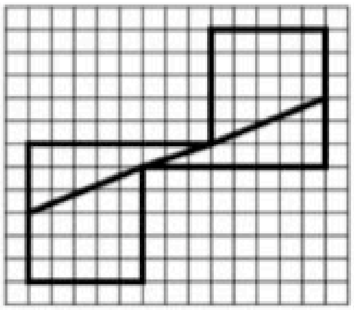


Figura 3

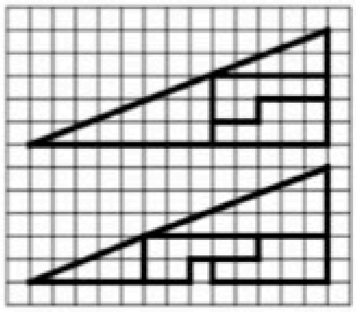


Figura 4

I.C. "Fermi-Oggioni" - Villasanta (MB)
Classe: I C
Insegnante di riferimento: prof. Antonio Guerrieri
Ricercatore: dott. Alexandro Redaelli
Partecipanti: Micaela Angelucci, Simone Bellomi, Sofia Beretta, Elisa Borgonovo, Alessandro Brioschi, Stefano Cambiaghi, Elena Colombo, Federica Colombo, Serena Galimberti, Jair Huarcaya Marroquin, Roberta Levati, Alessandro Luzzi, Paola Magni, Claudio Manzotti, Ndueld Ndoci, Tommaso Maria Polizzi, Mattia Rosato, Andrea Rovelli, Angelica Sormani, Laura Steiner, Marco Viganò, Samuele Volpini

Istituto Comprensivo Fermi-Oggioni di Villasanta (MB)

Scuola Secondaria di 1° Grado Fermi

Classe Prima C

Math.en.Jeans

Un quadretto in più o in meno?

Docente di riferimento: Prof. A. Guerrieri
Ricercatore Math.en.Jeans: Dott. A. Redaelli

Introduzione

Con il Prof. Guerrieri e il Dott. Redaelli abbiamo iniziato il progetto Math.en.Jeans in collaborazione con il Centro *matematita* presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano.

Alla nostra classe è stato assegnato il problema "Un quadretto in più o in meno?" con il compito di capire perché alcune figure dopo essere state scomposte e ricomposte in maniera diversa non occupano più la stessa superficie (presentano infatti un quadretto in più o in meno).

Per lo svolgimento dell'attività ci siamo divisi in gruppi di lavoro. Inizialmente tutti i gruppi hanno studiato lo stesso quesito mentre nella parte finale della ricerca ogni gruppo ha approfondito lo studio di un particolare quesito.

La nostra ricerca

Quesito 1

Per iniziare abbiamo disegnato il quadrato del problema, lo abbiamo ritagliato (come in figura 1) e ricomposto formando il rettangolo di figura 2. Poi abbiamo ingrandito del doppio, del triplo e del quadruplo le due figure e abbiamo notato che la diagonale del rettangolo, in realtà, è formata da segmenti non allineati. La superficie lasciata libera dai quattro pezzi del quadrato ha formato un quadretto in più.

Nella figura 5, che segue, abbiamo fatto i disegni del quadrato diviso in due trapezi e in due triangoli e del rettangolo che abbiamo ottenuto ricomponendo i 4 pezzi. Possiamo notare che la diagonale del rettangolo, in rosso, non coincide con il lato obliquo del trapezio rettangolo e l'ipotenusa del triangolo rettangolo.

Per capire meglio il problema abbiamo misurato gli angoli dei quattro pezzi ottenuti dal quadrato con il goniometro, poi li abbiamo ritagliati e ricomposti per formare il rettangolo. Abbiamo notato che la somma degli angoli lungo la diagonale non corrisponde ad un angolo piatto, ma misura circa un grado in più. È per questo motivo che rimane un po' di superficie libera attorno alla diagonale del rettangolo, tanto da formare un quadretto in più. Quando le figure vengono ingrandite, la superficie libera che si forma diventa più visibile. Inoltre, se osserviamo la figura 6 ci accorgiamo che gli angoli del rettangolo non sono tutti retti; infatti ricomponendo i pezzi e sommando gli angoli consecutivi che dovrebbero formare i due angoli retti, si ottiene che i due angoli hanno un’ampiezza di 69° + 20° = 89° con una conseguente superficie libera tra le figure che compongono il rettangolo.

Nella figura 6 vengono riportate le misure approssimate degli angoli delle varie figure.

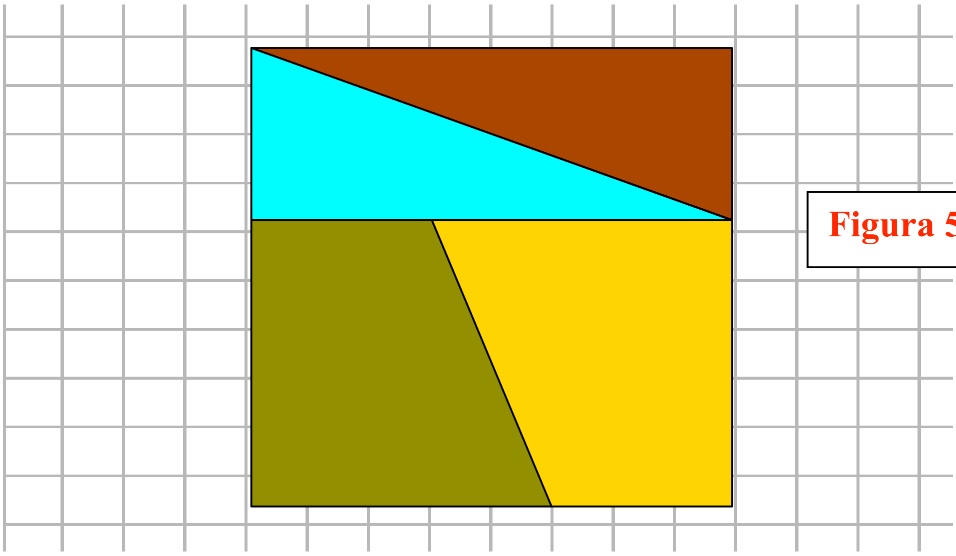
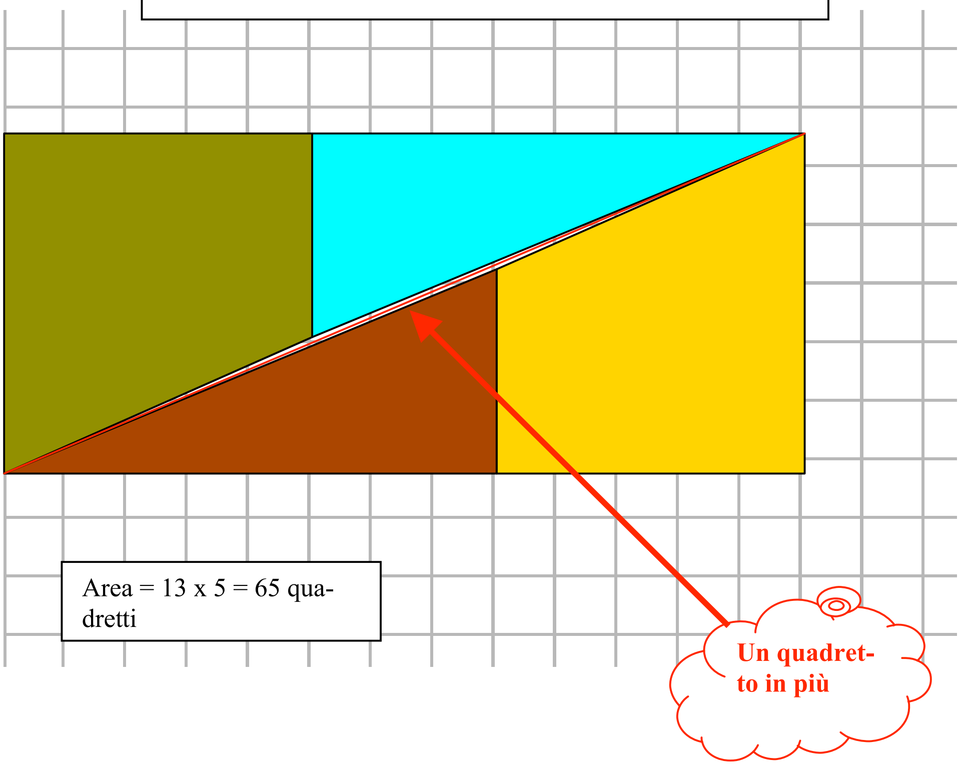
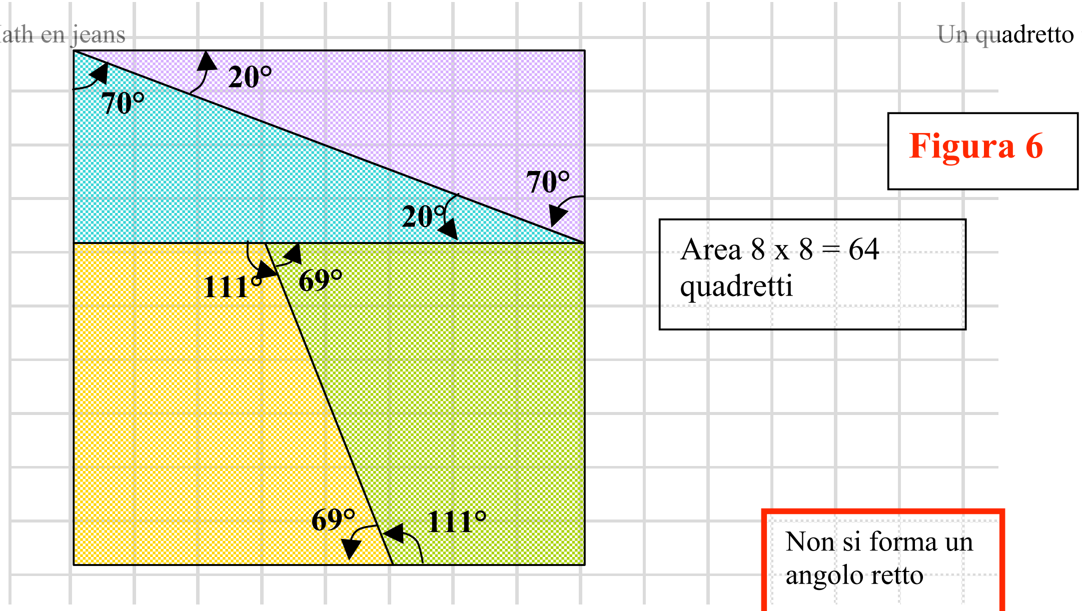
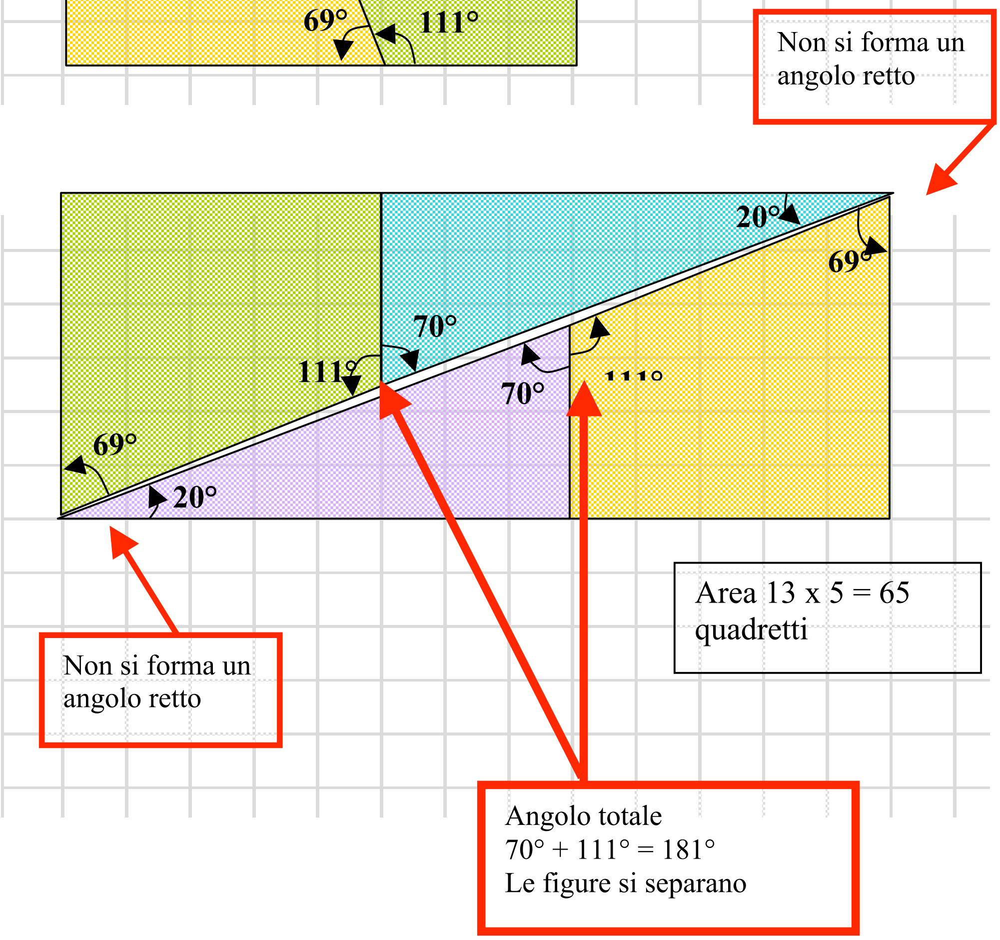


Figura 5

Area = 8 x 8 = 64 quadretti

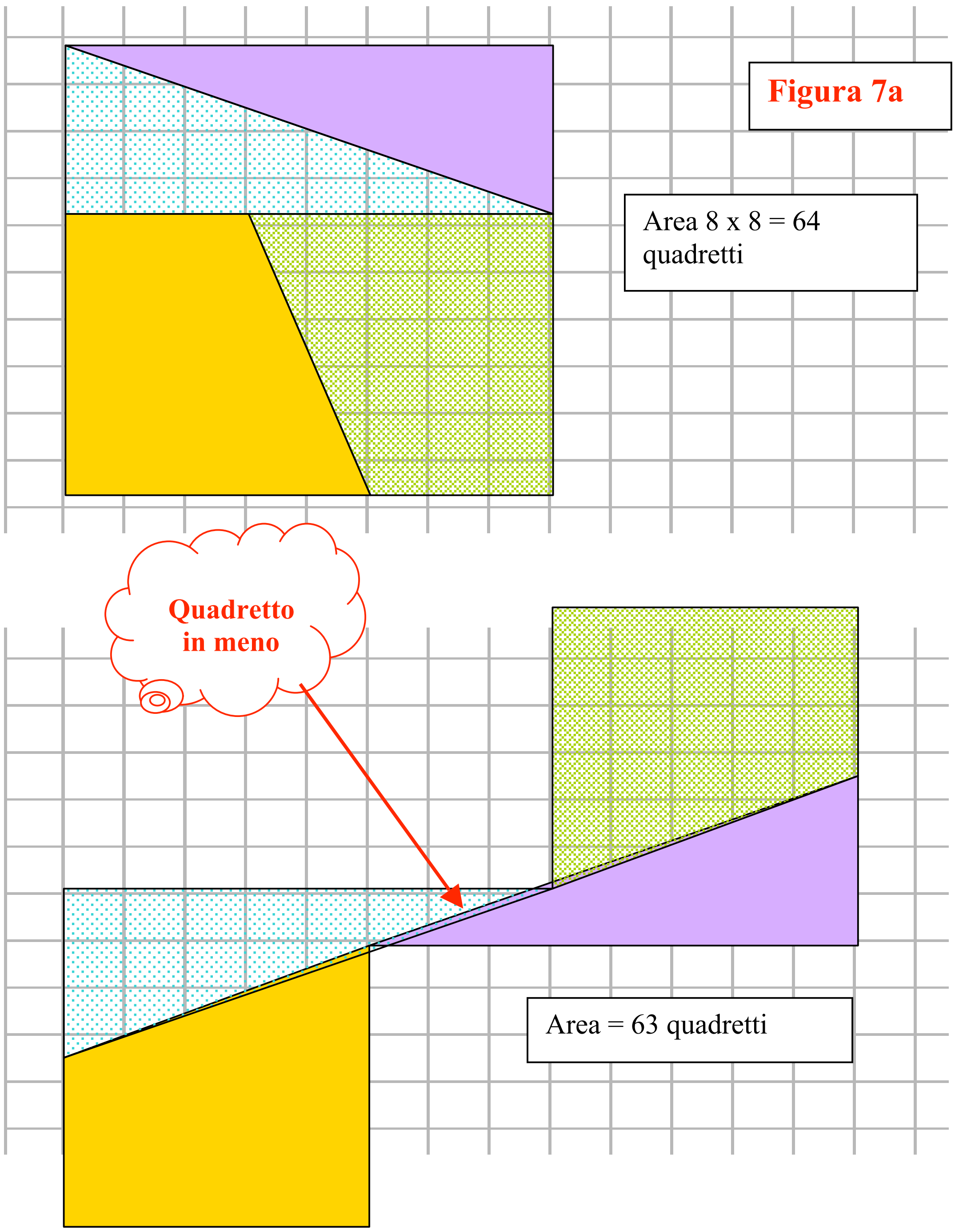






Quesito 2

Anche quando abbiamo scomposto il quadrato (di figura 1) ricomponendolo come in figura 3 ci siamo accorti che mancava un quadretto. Abbiamo poi ingrandito del doppio, triplo e quadruplo e abbiamo scoperto che i lati obliqui dei trapezi rettangoli e le ipotenuse dei triangoli rettangoli non erano allineati, ma c'era una sovrapposizione che faceva apparire un quadretto in meno (figura 7a).



A questo punto, per capire perché manca un quadretto, abbiamo disegnato il quadrato, lo abbiamo scomposto ancora una volta in due triangoli e due trapezi ed abbiamo misurato tutti gli angoli con il goniometro. Dopo abbiamo ritagliato il quadrato e lo abbiamo ricomposto secondo la figura proposta dal quesito. Osservando la figura 7b, ci siamo accorti che gli angoli lungo il segmento obliquo che sembra tagliare a metà la figura (vedi figura 3) non erano di 180° ma leggermente diversi; infatti si formano degli angoli convessi di ampiezza 69° + 90° +20° = 179°. Inoltre gli angoli che si formano tra il cateto minore dei due triangoli rettangoli e la base minore dei due trapezi rettangoli sono maggiori dell'angolo piatto (70° + 111° = 181°). Tale situazione comporta la sovrapposizione delle figure ed un quadretto in meno.

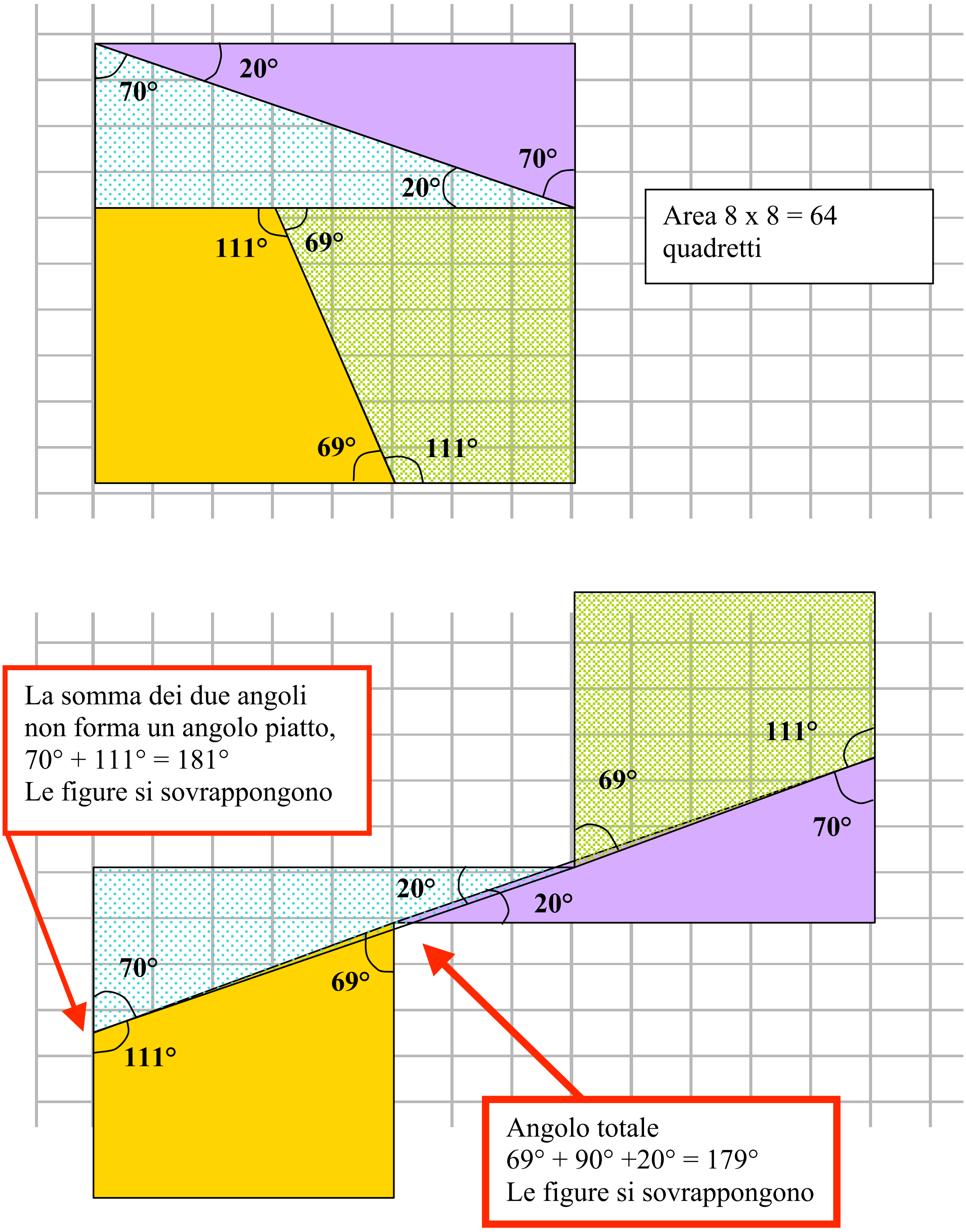


Figura 7b

Quesito 3

Ingrandendo i quadretti che compongono il triangolo del doppio, triplo e quadruplo e ricomponendo la figura possiamo notare che uno dei tre lati non è “dritto” come nella figura di partenza: l’ipotenusa del triangolo rettangolo più grande e quella del triangolo rettangolo più piccolo non sono allineate. Di conseguenza abbiamo dedotto che lì poteva esserci il quadretto in più.

Come si può notare dai disegni delle figure 8 e 9 il lato AC non è “dritto”; infatti se tiriamo una linea dal punto A al punto C si può notare che nel primo caso l’angolo tra le due ipotenuse è concavo, così da formare una piccola fascia che corrisponde a mezzo quadretto in meno, mentre nel secondo caso l’angolo tra le due ipotenuse è convesso, così da formare una piccola fascia che corrisponde a mezzo quadretto in più. Per questo motivo nel triangolo di figura 9 compare un quadretto in meno.

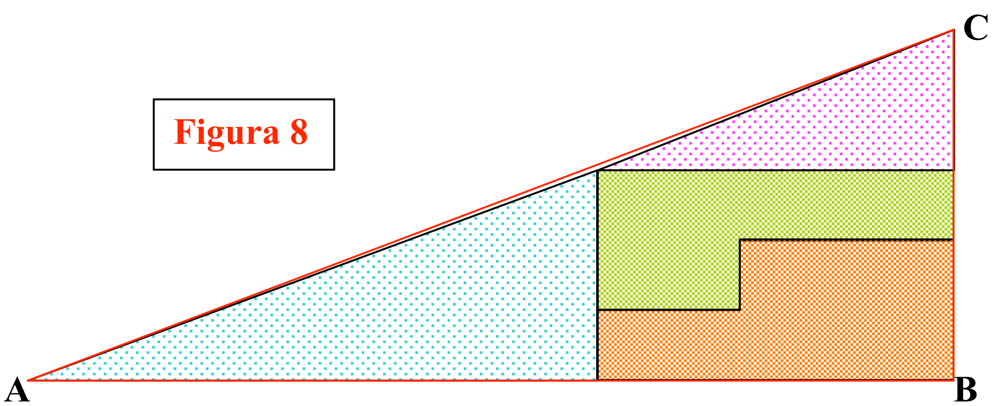


Figura 8

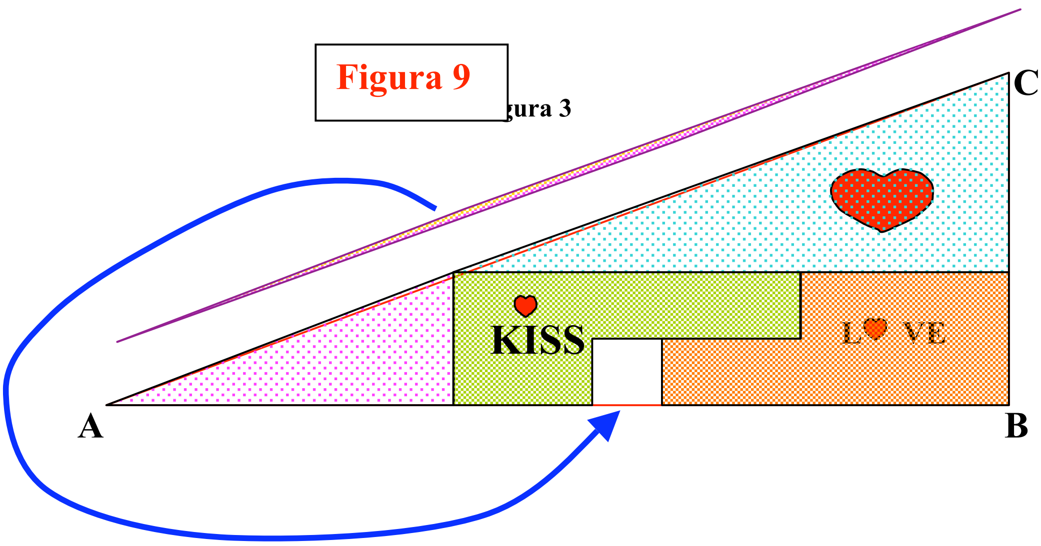


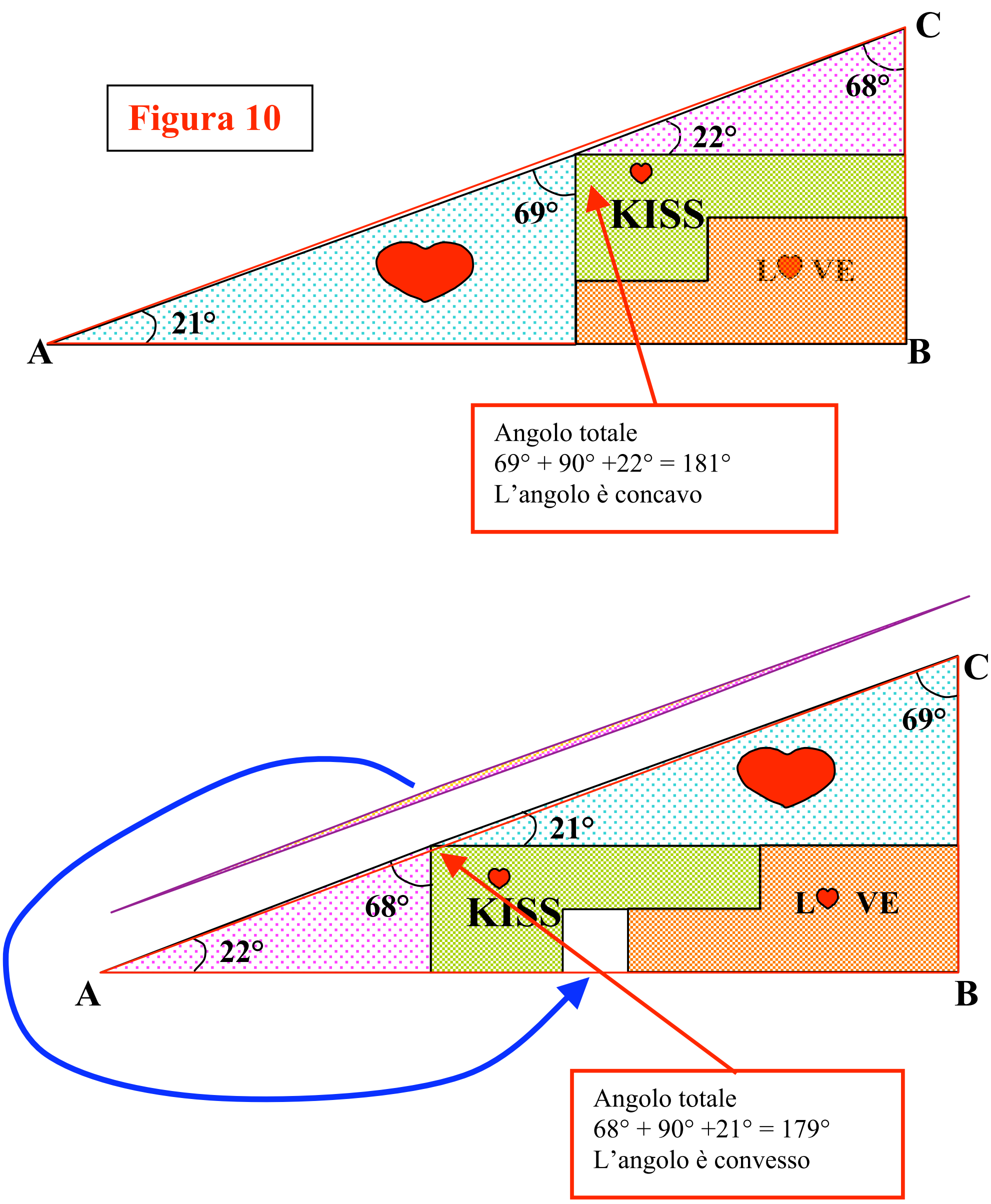
Figura 9

Anche per il terzo quesito abbiamo misurato gli angoli per capire come mai compare un quadretto in meno.

Dopo aver ingrandito e ritagliato il triangolo, abbiamo misurato gli angoli di tutte le figure ottenute. Se le ipotenuse dei due triangoli rettangoli fossero allineate la somma degli angoli avrebbe dovuto essere di 180° (figura 10). In realtà ci siamo accorti che la somma degli angoli sull'ipotenusa cambiava da un triangolo all'altro: nel primo caso era di poco superiore a 180° mentre nel secondo caso era di poco inferiore a 180°. Osservando la figura 10 si vede che mentre nel primo triangolo l'angolo AǑC risulta concavo (69° + 90° +22° = 181°), nel secondo l'angolo AÔC risulta convesso (68° + 90° +21° = 179°).

Per questo motivo si ha l'illusione di avere un quadretto in meno.

Figura 10



Cambiamo le misure al quadrato

Dopo aver scoperto perché scomponendo il quadrato e ricomponendolo in maniera diversa cambiava il numero dei quadratini, abbiamo approfondito lo studio del primo quesito. Abbiamo deciso di studiare cosa accade se cambiamo le dimensioni del quadrato mantenendo sempre le stesse figure che lo compongono, per poter costruire il rettangolo sempre allo stesso modo. Abbiamo poi intuito che per poter costruire il rettangolo come in figura 2, x deve sempre essere più piccola di y (vedi figura 11).

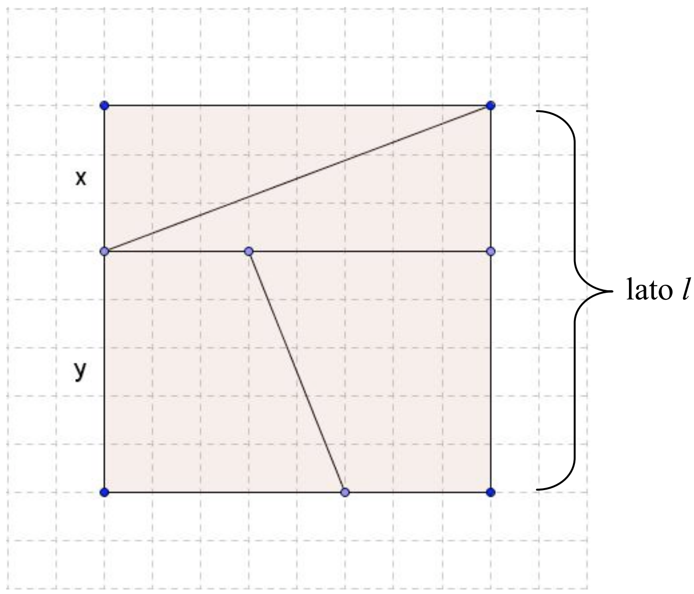


Figura 6

A questo punto abbiamo cercato per quali valori di x, y ed l, il rettangolo possiede un quadretto in più o in meno rispetto al quadrato.

Per fare questo abbiamo riempito una tabella:

Lato del quadrato *l*	*x*	*y*	N° di quadretti che compongono il quadrato	N° di quadretti che compongono il rettangolo	C’è un quadretto in più?	C’è un quadretto in meno?
3	1	2	9	10	Sì	
4	1	3	16	21		
4	2	2	16	12		
5	1	4	25	36		
5	2	3	25	24		Sì
6	1	5	36	55		
6	2	4	36	40		
6	3	3	36	27		
7	1	6	49	78		
7	2	5	49	60		
7	3	4	49	44		
8	1	7	64	105		
8	2	6	64	84		
8	3	5	64	65	Sì	
8	4	4	64	48		
9	1	8	81	136		
9	2	7	81	112		
9	3	6	81	90		
9	4	5	81	70		
10	1	9	100	171		
10	2	8	100	144		
10	3	7	100	119		
10	4	6	100	96		
10	5	5	100	75		
11	1	10	121	210		
11	2	9	121	180		
11	3	8	121	152		
11	4	7	121	126		
11	5	6	121	102		
12	1	11	144	253		
12	2	10	144	220		
12	3	9	144	189		
12	4	8	144	160		
12	5	7	144	133		
12	6	6	144	108		

13	1	12	169	300		
13	2	11	169	264		
13	3	10	169	230		
13	4	9	169	198		
13	5	8	169	168		Sì
13	6	7	169	140		
14	1	13	196	351		
14	2	12	196	312		
14	3	11	196	275		
14	4	10	196	240		
14	5	9	196	207		
14	6	8	196	176		
14	7	7	196	147		
15	1	14	225	406		
15	2	13	225	364		
15	3	12	225	324		
15	4	11	225	286		
15	5	10	225	250		
15	6	9	225	216		
15	7	8	225	184		

Nella maggior parte dei casi i numeri non rispettavano il quadretto in più o in meno.

A questo punto abbiamo costruito una piccola tabella dove abbiamo riportato solo i valori di x, y ed l corrispondenti ai rettangoli che avevano un quadretto in più o in meno:

x	y	l	Quadretto in + o in - ?
1	*2*	*3*	+
2	*3*	*5*	-
3	5	8	+
5	8	13	-

Infine abbiamo messo tutti i numeri in fila

1 2 3 5 8 13

e ci siamo accorti che ogni numero si ottiene facendo la somma dei due precedenti.

Questi numeri messi in fila sono detti **numeri di Fibonacci** grazie al matematico che li ha scoperti.

I numeri di Fibonacci

Fibonacci fu il matematico che nel medioevo portò i numeri arabi in Europa.

I primi dieci numeri della successione di Fibonacci sono:

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …

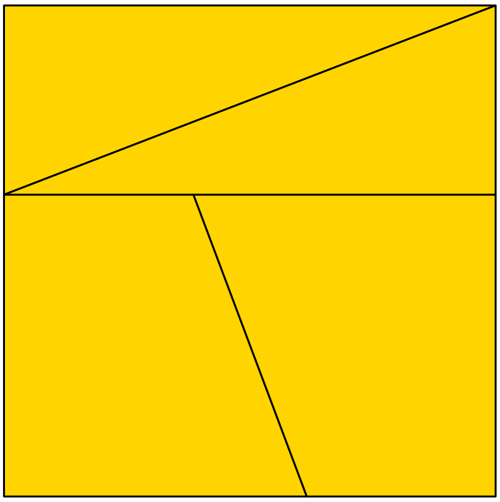
e ogni numero si ottiene facendo la somma dei due precedenti.

Figura 7: Leonardo Fibonacci

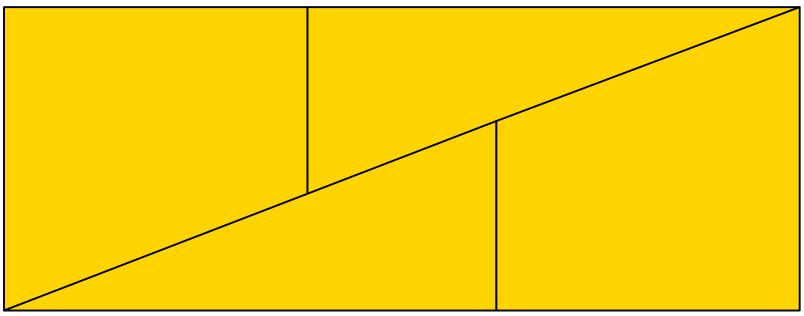
Abbiamo capito che il nostro problema rappresenta una proprietà dei numeri Fibonacci; infatti un quadrato che ha per lato un numero di Fibonacci ha la stessa area, più o meno un quadretto, di un rettangolo che ha come lati il numero precedente ed il numero successivo nella successione di Fibonacci.

Prendiamo in considerazione il numero 13

Il quadrato e il rettangolo hanno la stessa area più o meno 1



$$\text{Area} = 13^2 = 169$$



$$\text{Area} = 8 \times 21 + 1 = 169$$

Numero che precede il 13

Numero che segue il 13

Quadretto in + o in –

Quando si esegue la divisione tra due numeri consecutivi di Fibonacci si ottiene un numero che si avvicina sempre di più a $\phi = 1{,}6180339\ldots$

Questo rapporto è detto **aureo** mentre il numero ϕ viene chiamato **sezione aurea**: tutte le cose perfette, secondo alcune credenze, devono rispettare le proporzioni di Fibonacci.

Leonardo da Vinci usò il rapporto aureo per i suoi studi; ad esempio nell'uomo "perfetto" di Vitruvio l'altezza della parte inferiore del corpo fino all'ombelico deve essere 1,6 volte maggiore della parte superiore. Allo stesso modo la misura dell'avambraccio e della mano deve essere 1,6 volte maggiore della misura del braccio. Anche nella Gioconda Leonardo da Vinci utilizza il rapporto aureo per dare le giuste proporzioni alla figura.

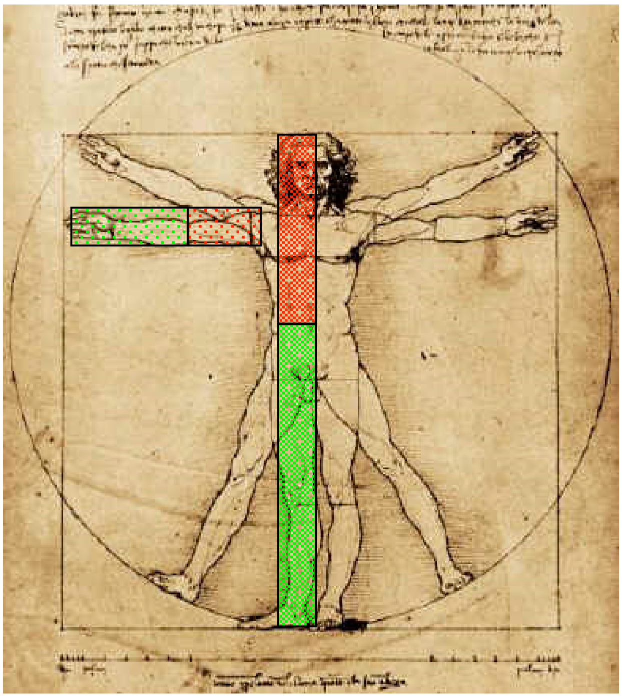


Figura 8: L'uomo di Vitruvio

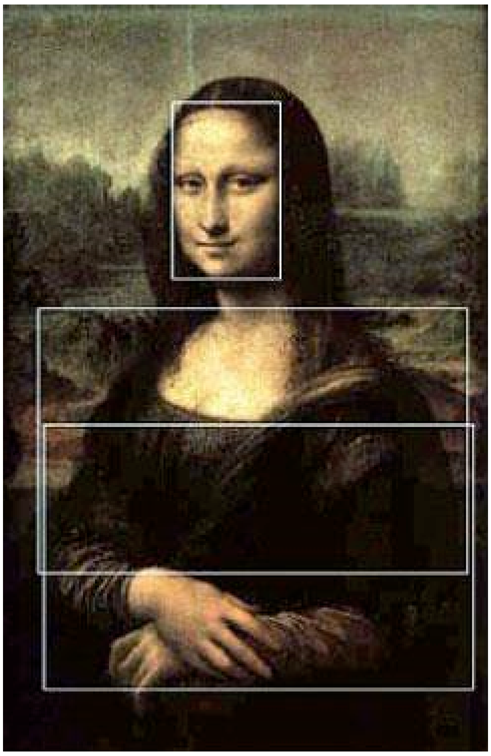


Figura 9: La Gioconda

Molti anni prima di Fibonacci, il rapporto tra lunghezza e larghezza nei templi greci era di preferenza 1,618. La facciata del Partenone di Atene, ad esempio, è un rettangolo aureo di Fibonacci.

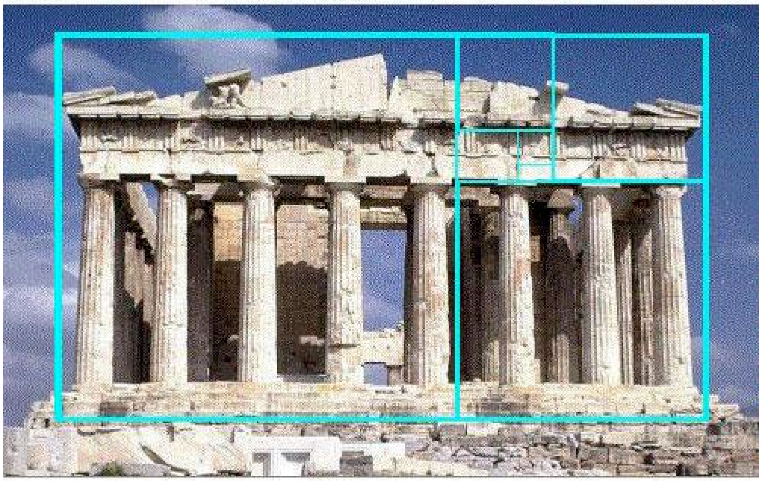


Figura 10: Facciata del Partenone di Atene

La piramide egizia di Cheope, costruita molti secoli prima del Partenone, ha una base di 230 metri ed una altezza di 145 metri: il rapporto base/altezza corrisponde a 1,58, molto vicino a 1,618.

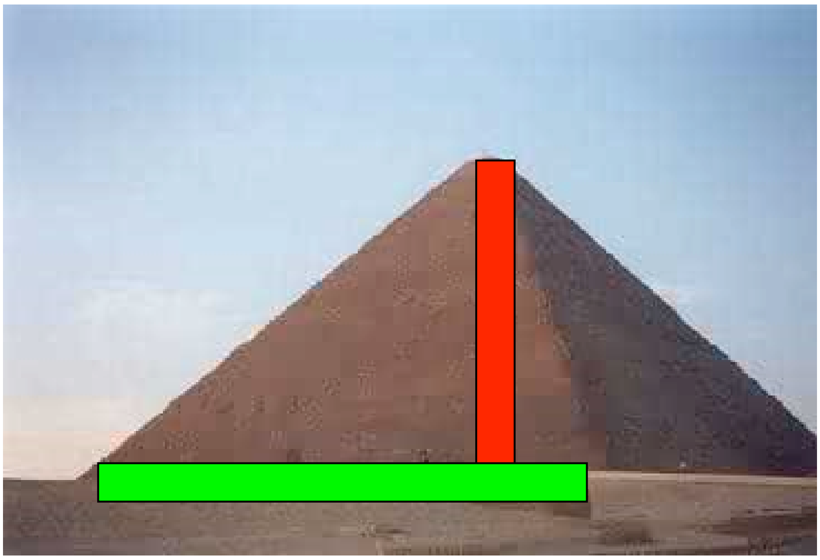


Figura 11: La piramide di Cheope

Le carte di credito e le sim card hanno un rapporto tra i lati che è circa 1,6. Per verificare ciò, abbiamo misurato le dimensioni di una carta di credito ed abbiamo fatto il rapporto:

lunghezza = 8,6 cm larghezza = 5,4 cm rapporto 8,6 : 5,4 = 1,59

È vero!

5,4 cm

8,6 cm

Figura 12

Chiudiamo il nostro bellissimo studio ricordando che in natura esistono tantissimi esempi della successione di Fibonacci.

Quasi tutti i fiori hanno tre, cinque, otto, tredici, ventuno, trentaquattro, cinquantacinque o ottantanove petali: i gigli ne hanno tre, le margherite di solito ne hanno trentaquattro, cinquantacinque o ottantanove.

Figura 13

Classe **Prima C** Scuola Secondaria di Primo Grado “Fermi-Oggioni” Villasanta (MB)