Riga e compasso

Alcuni terreni coltivati, di forma quadrangolare, devono essere espropriati per far passare un'autostrada. Ai contadini verranno dati, in cambio, dei terreni con la stessa forma e la stessa superficie, che devono essere ricavati da un unico terreno quadrato più grande. Come si devono disporre i terreni nel lotto quadrato?

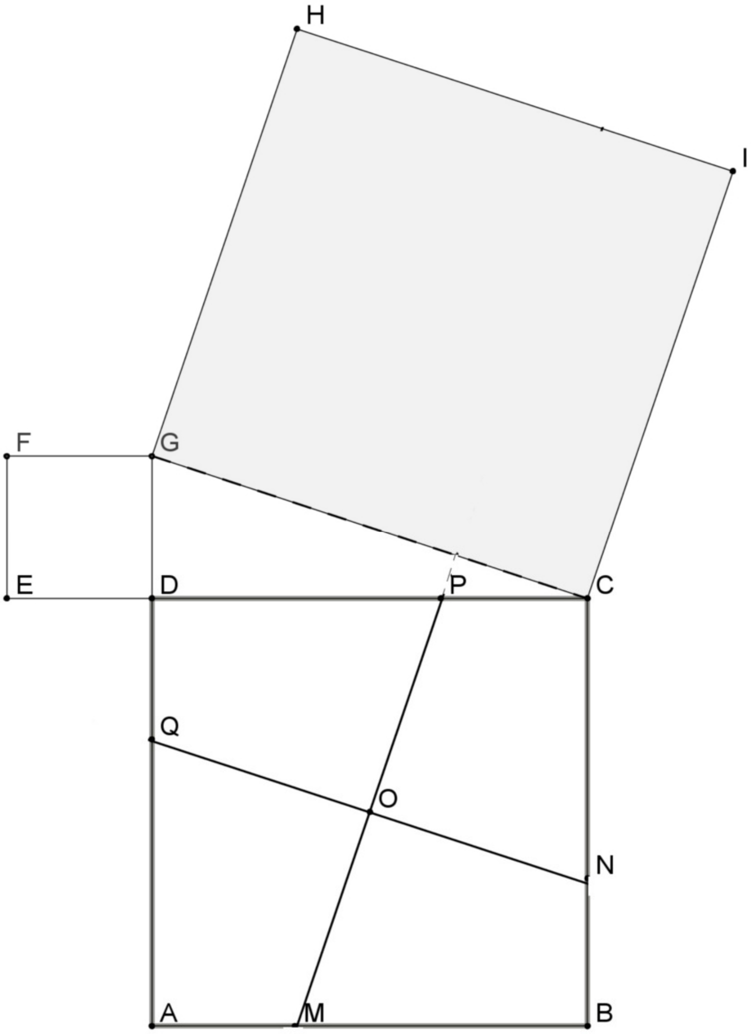
ICS Gavirate – Gavirate (VA)
Classi: II A, II B, II C
Insegnante di riferimento: prof.ssa Marina Loviselli e prof.ssa Paola Pedrini
Ricercatore: Alessandro Cattaneo
Partecipanti: Chiara Amoroso, Luca Focchi, Elena Furlotti, Fabiola Maderna, Martino Masolo, Alessandro Micheloni, Giulia Micheloni, Isabella Mondini, Leonardo Vulcano

PRESENTAZIONE DEL PROBLEMA

Il 12 ottobre 2010 abbiamo incontrato per la prima volta Alessandro Cattaneo, il ricercatore che ci è stato assegnato per il progetto MATh.en.JEANS.

È venuto nella nostra scuola per conoscerci e proporci un problema "difficile", da risolvere nei prossimi mesi, lavorando insieme e con il suo aiuto. Alessandro ci ha detto anche che, se ci fossimo riusciti, saremmo stati i primi ad averlo risolto.

Alessandro ci ha suggerito di studiare la figura costruita nel seguente modo:
Si traccino un quadrato ABCD e un quadrato DEFG, in modo che ED e DG siano rispettivamente i prolungamenti dei lati DC e AD.
Si congiunga C con G, costruendo così il triangolo rettangolo DCG.
Sul lato GC si costruisca il quadrato CGHI.
Indicato con O il centro del quadrato ABCD (punto di intersezione delle diagonali), si conduca da O la retta PM perpendicolare a GC e poi la retta QN perpendicolare a PM. Il quadrato ABCD è così suddiviso in quattro quadrilateri.



Abbiamo dovuto descrivere la figura usando termini matematici e ci siamo accorti che non sempre li sappiamo usare in modo preciso. Alessandro ha infatti corretto diverse espressioni “poco precise” che abbiamo usato per descrivere la sua costruzione e ha insistito molto sul fatto che non basta che un’ipotesi sembri vera, oppure che lo sia in un caso particolare, per poter dire di averla dimostrata: occorre una dimostrazione rigorosa.

Ci ha quindi presentato i due strumenti che abbiamo il permesso di usare. Sono i due strumenti che usavano i matematici dell’antichità: **il righello senza la scala graduata e un compasso senza la possibilità di fissare l’apertura (cioè che “perde la memoria”).** Non ci servirà a niente la calcolatrice, perché il nostro problema non dipende dalle misure dei lati dei quadrati. Ci farebbe comodo usare la squadra per tracciare le rette perpendicolari, ma questo non è consentito. Dovremo trovare un modo di costruirle con i due strumenti permessi. Oltre a questi, potremo far ricorso a tutte le conoscenze di geometria euclidea che abbiamo acquisito fino a oggi: definizioni, proprietà e teoremi.

Prima di cominciare, Alessandro ci ha detto che un’altra scuola, come noi, stava lavorando su questo stesso problema. Avremmo potuto metterci in contatto con loro e con lui, su un forum aperto nei giorni successivi, per avere aiuto e collaborare.

Inizialmente abbiamo lavorato alla risoluzione del problema costruendo dei modelli con la carta colorata. Per non limitarci a un caso particolare, abbiamo realizzato i modelli cambiando le misure dei lati dei quadrati.

Ogni settimana abbiamo dedicato due ore all’atélier di MATh.en.JEANS. Durante la prima delle due ore ragionavamo su un particolare aspetto del problema o su una dimostrazione; la seconda ora era invece dedicata alla trascrizione a computer dei nostri risultati e alla loro pubblicazione sul forum, in modo che Alessandro potesse controllare se eravamo sulla strada giusta.

Alla fine del lavoro abbiamo poi preparato i cartelloni che abbiamo presentato in università il 16 aprile.

COMINCIAMO A STUDIARE IL PROBLEMA

Come primo tentativo di risoluzione abbiamo cercato una sistemazione dei quadrangoli nel quadrato più grande. Credevamo di esserci riusciti, ma Alessandro ci ha detto che si tratta solo di casi particolari.

Abbiamo anche provato a ragionare in termini di percentuali, ma si trattava sempre di casi particolari, e a noi era richiesto di risolvere il problema in generale.

Osservando la figura, le rette QN e CG sembravano essere parallele, ma non bastava vederlo, bisognava provarlo con un ragionamento.

I quattro quadrangoli nei quali è diviso il quadrato ABCD ci sembravano congruenti, ma anche in questo caso occorreva provarlo.

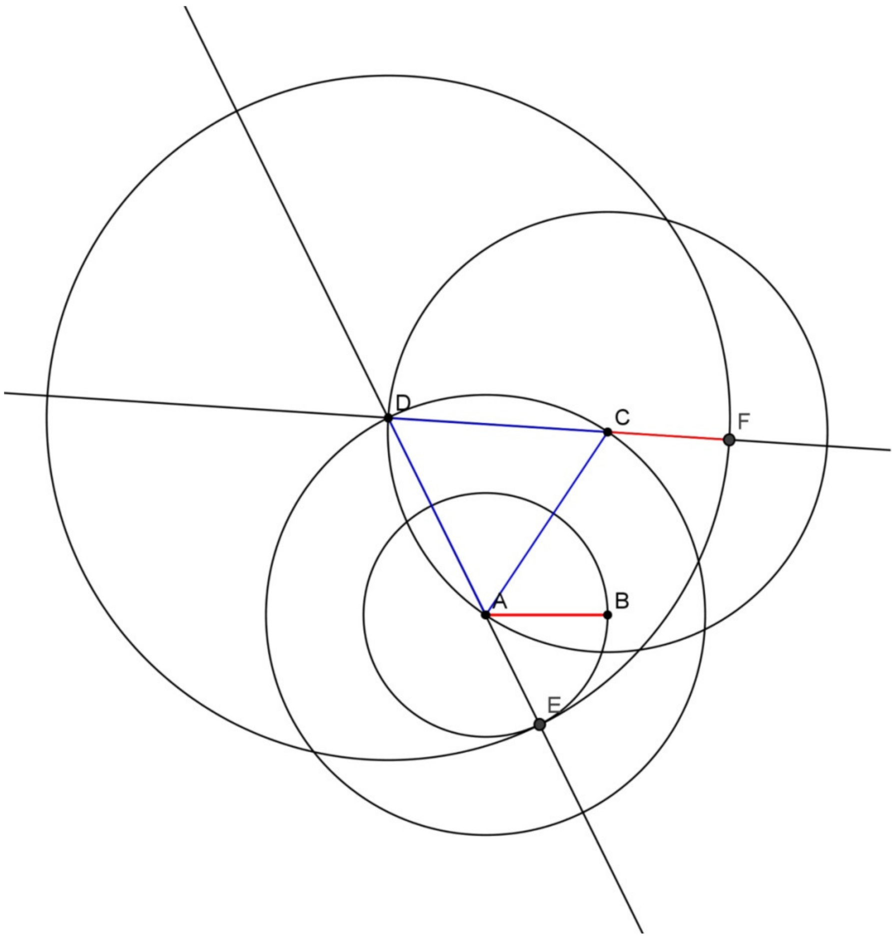
Non potevamo misurare gli angoli, perché il goniometro non è tra gli strumenti consentiti. Abbiamo allora pensato di trasportare i quadrangoli nel quadrato grande, facendo coincidere gli angoli retti con quelli del quadrato. Ma come fare a “spostarli”? Era proprio indispensabile imparare a usare i due strumenti permessi!

Alessandro ci ha detto che una volta imparato a fare una determinata costruzione con riga e compasso, avremmo potuto considerarla acquisita, e non sarebbe stato necessario ripeterla tutte le volte che ci serve.

La prima costruzione rigorosa che abbiamo fatto è quella dell’asse del segmento; usando questa costruzione siamo quindi in grado di trovare il punto medio di un segmento e di costruire una retta perpendicolare.

In seguito abbiamo dovuto imparare a trasportare i segmenti e gli angoli.

Trasporto di un segmento



Dato il segmento AB, vogliamo costruire un segmento congruente ad AB, che abbia un estremo nel punto C.

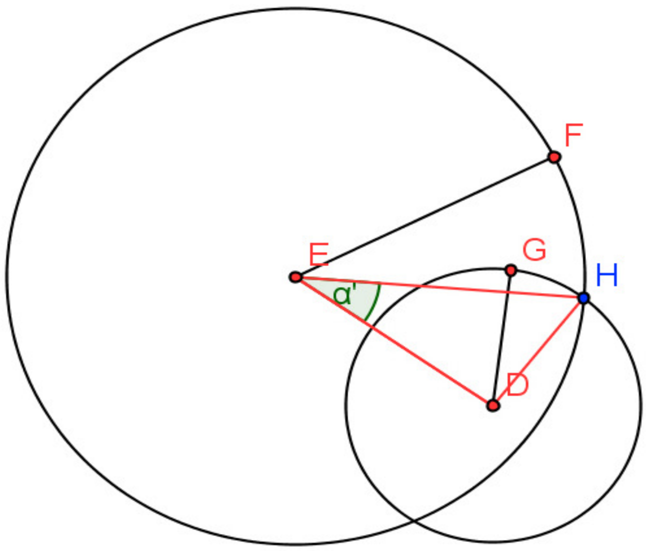
Tracciare la circonferenza di centro A e raggio AC. Tracciare la circonferenza di centro C e raggio AC. Costruire il triangolo equilatero ADC, dove D è uno dei punti d'intersezione delle due circonferenze. Tracciare poi le rette AD e CD.

Tracciare la circonferenza di centro A e raggio AB. Essa taglia la retta AD in E, e si ha AB = AE poiché entrambi raggi della stessa circonferenza.

Tracciare la circonferenza di centro D e raggio DE. Essa taglia la retta DC nel punto F.

Si ha che DF=DE perché raggi della stessa circonferenza.

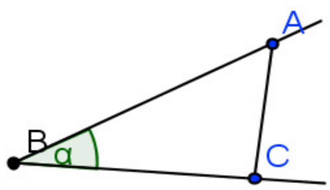
Ma DF=DC+CF e DE=DA+AE e DC=DA, perché sono i lati di un triangolo equilatero, quindi CF = AE = AB.



Trasporto di un angolo

Dato l'angolo α di vertice B, "trasportarlo in E" significa costruire un angolo α‵ di ampiezza pari a quella di α che abbia vertice in E.

Si scelgano a piacere, sulle due semirette che lo individuano, i punti A e



C e si costruisca il triangolo ABC.

Con la costruzione che permette il trasporto dei segmenti, trasportiamo il lato BC in E, ottenendo il segmento ED. In modo analogo trasportiamo AC in D, ottenendo DG, e AB in E, ottenendo EF.

Tracciamo la circonferenza di centro E e raggio EF, e la circonferenza di centro D e raggio DG.

Indichiamo con H uno dei loro punti di intersezione.

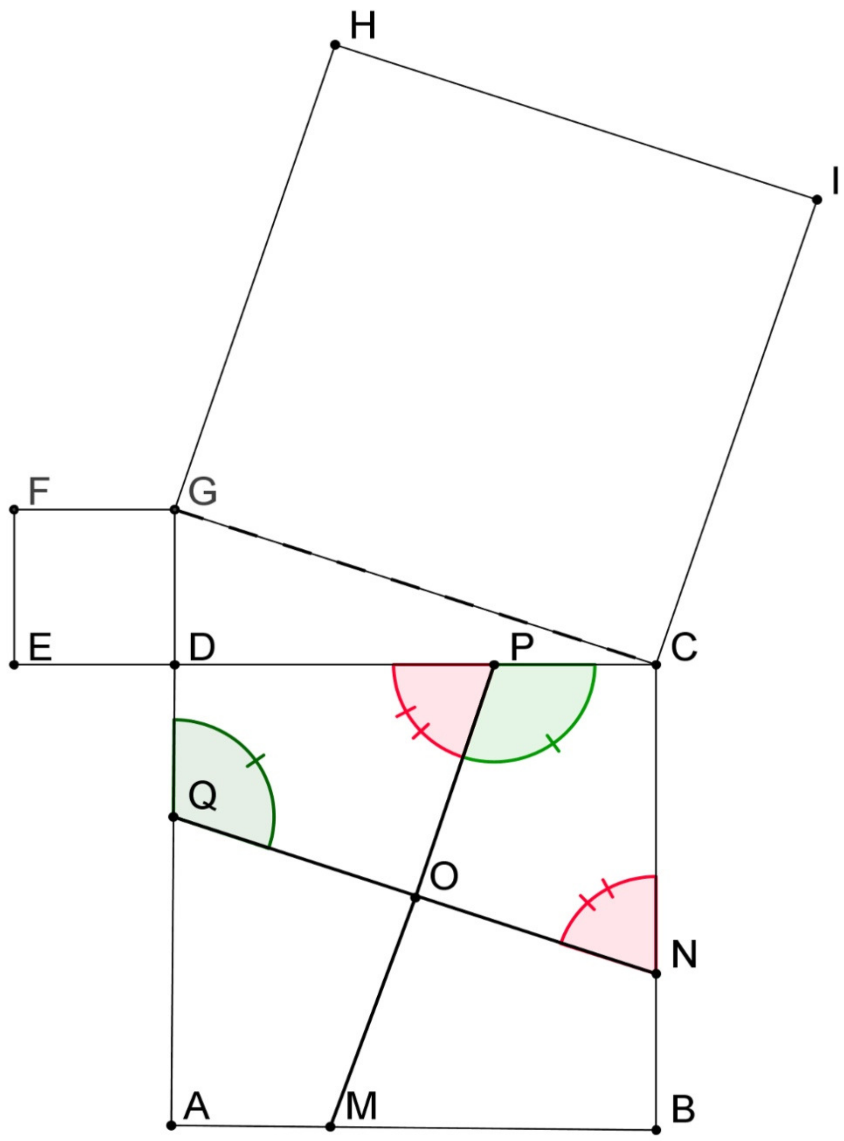
Osserviamo che AB=EH=EF e che AC=DH=DG perché raggi della stessa circonferenza.

Quindi i due triangoli ABC e HED, per il terzo criterio di congruenza dei triangoli, sono congruenti. Dunque hanno anche gli angoli rispettivamente congruenti, e $A\hat{B}C = H\hat{E}G$.

CONGRUENZA DEI QUADRANGOLI

La nostra prima osservazione riguarda i quattro quadrangoli nei quali viene diviso il quadrato ABCD, che sono risultati congruenti in tutti i modelli che abbiamo realizzato.

Per dimostrare che lo sono in generale, abbiamo dapprima dimostrato che hanno gli angoli rispettivamente congruenti, poi abbiamo provato che hanno anche i lati congruenti.



Congruenza degli angoli

Osserviamo innanzitutto che

$P\hat{O}N = P\hat{C}N = P\hat{D}Q = P\hat{O}Q$.

per costruzione.

Vale anche

$P\hat{C}N = P\hat{D}Q = M\hat{A}Q = M\hat{B}N = 90°$,

essendo angoli di un quadrato.

Se consideriamo i quadrangoli PONC e DQOP, abbiamo che

$P\hat{O}N = P\hat{O}Q = 180°$;

dato che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è un angolo giro, si avrà che

$360° - 180° = 180° = O\hat{P}C + O\hat{N}C$.

Gli angoli $O\hat{P}C$ e $O\hat{N}C$ sono quindi supplementari. Poiché $O\hat{P}C$ è supplementare anche a $D\hat{P}O$, essendo adiacente a esso, allora si avrà che $D\hat{P}O = O\hat{N}C$ e $O\hat{P}C = D\hat{Q}O$.

Questo prova che i quadrilateri PONC e DQOP hanno gli angoli rispettivamente congruenti e un ragionamento analogo si può ripetere per tutti gli altri quadrangoli.

Congruenza dei lati

Tracciamo le diagonali AC e BD del quadrato ABCD. Queste diagonali dividono i quadrangoli in due triangoli: DQOP è diviso nei triangoli DQO e POD, BMON è diviso in OMB e BON.

Dimostriamo che DOQ è congruente a BON. Si ha che:

- $B\hat{N}O = D\hat{Q}O$ come già dimostrato (vedere congruenza angoli dei quadrangoli);

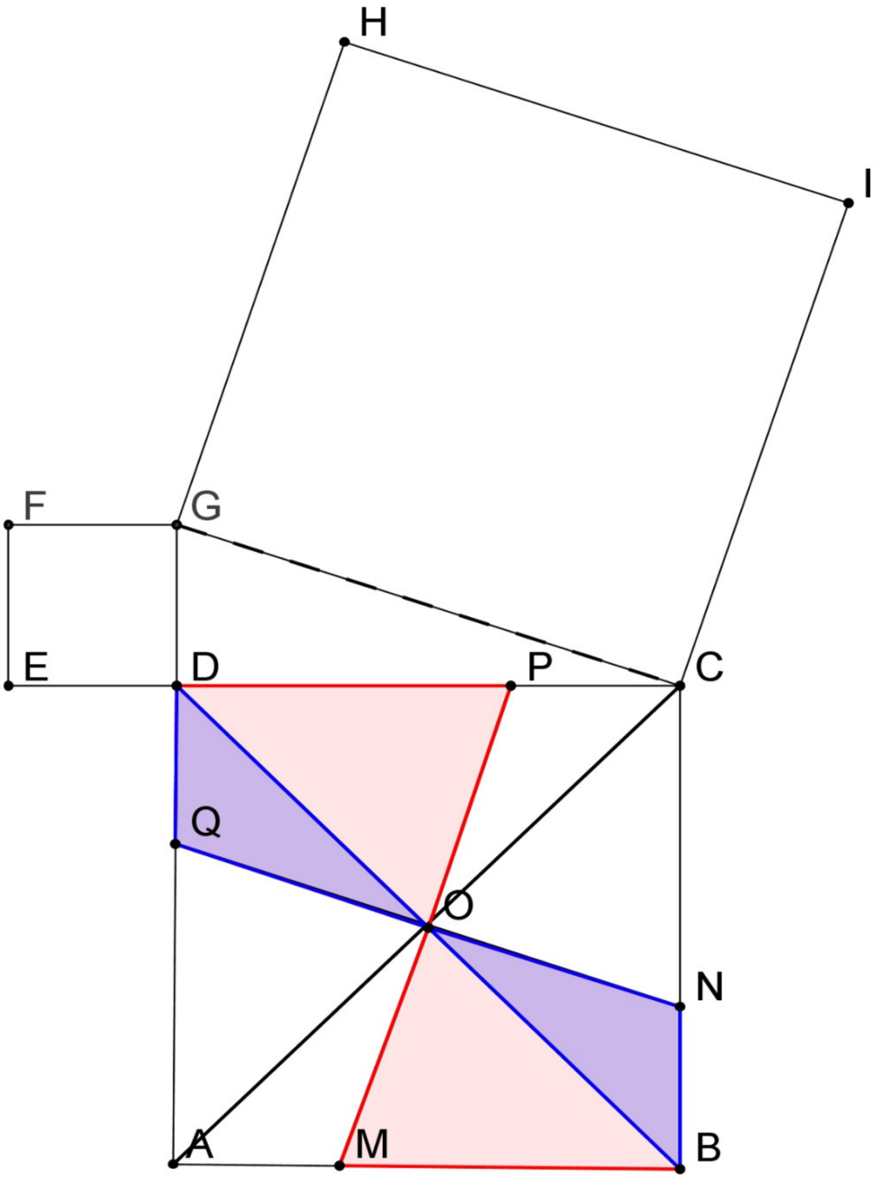
- $B\hat{O}N = D\hat{O}Q$ perché angoli opposti al vertice;

- $O\hat{B}N = O\hat{D}Q$ per differenza (la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto);

- DO=OB perché le diagonali di un quadrato si dimezzano vicendevolmente.

Quindi, per il secondo criterio di congruenza dei triangoli, DOQ e BON sono congruenti, e di conseguenza hanno anche i lati rispettivamente congruenti. In particolare ON=OQ e BN = QD. Lo stesso ragionamento vale per tutti gli altri triangoli.

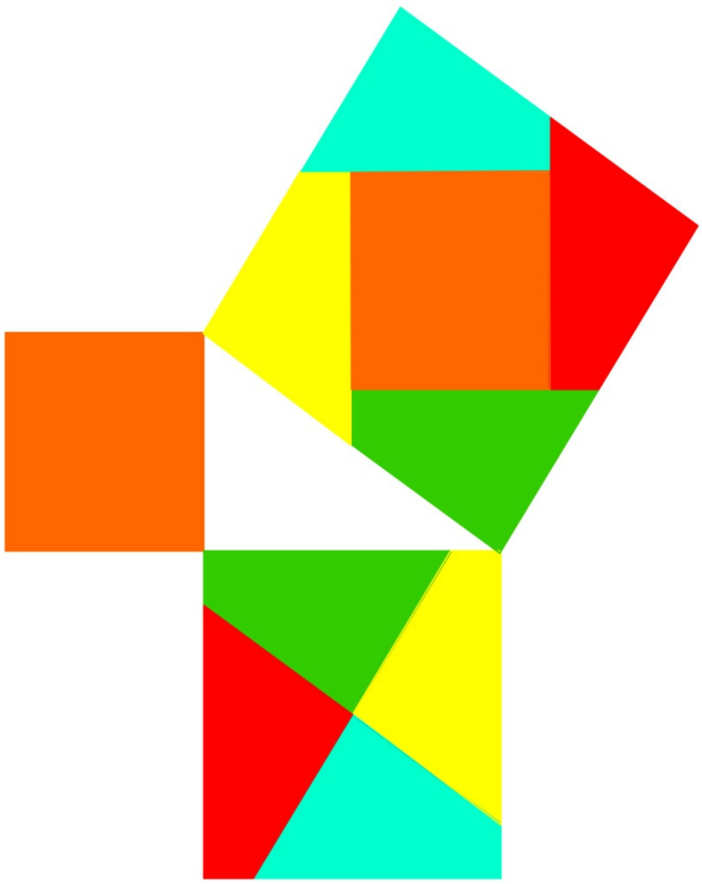
Poiché ogni quadrangolo è formato da due triangoli, incollati in maniera corrispondente, i quadrangoli sono fra loro congruenti.

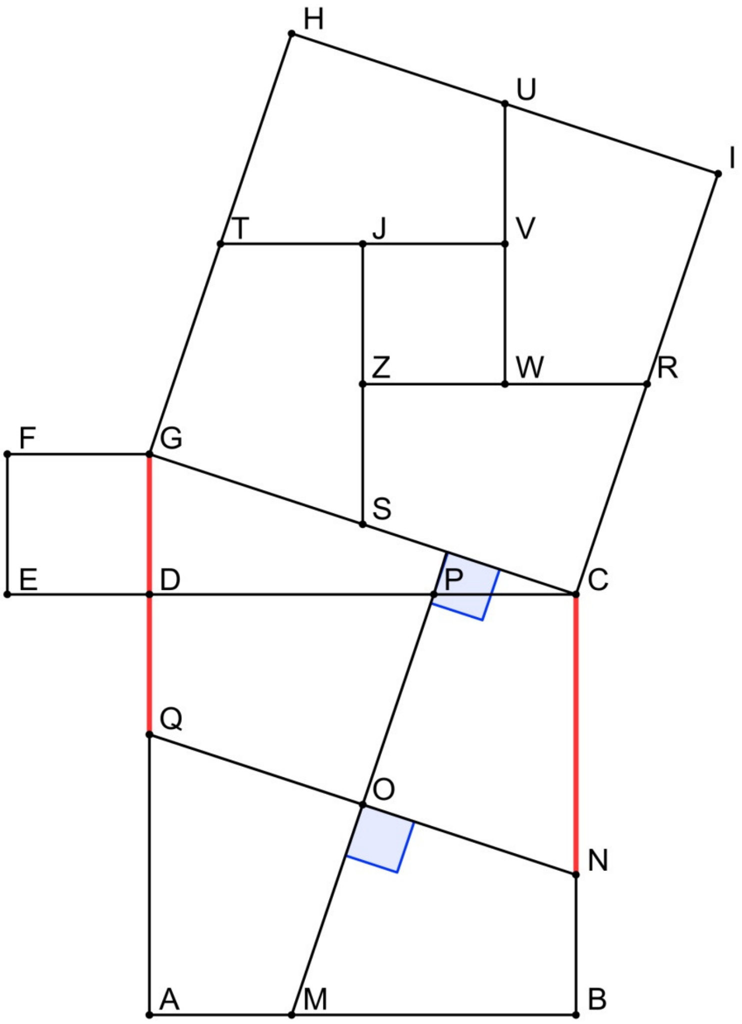


TRASPORTO DEI QUADRANGOLI

Dobbiamo ora formalizzare, con i metodi della geometria euclidea, l'operazione di ritagliare i quadrangoli dalla carta colorata, e poi di incollarli nel quadrato CGHI.

Le due costruzioni per trasportare segmenti e angoli che abbiamo visto in precedenza ci hanno permesso di trasportare i quattro quadrangoli nel quadrato CGHI, come mostrato nelle figure seguenti.





Dopo aver verificato con un modello di carta che i lati dei quadrangoli si dispongono formando esattamente il lato del quadrato, lo abbiamo dimostrato in modo rigoroso.

Trasportiamo i segmenti QO e ON sul lato GC e verifichiamo che la loro somma è esattamente congruente a GC; questo equivale a dimostrare che GC = QN.

Poiché in un parallelogramma i lati opposti sono congruenti, per mostrare che GC=QN è sufficiente dimostrare che il quadrilatero GCNQ sia un parallelogramma.

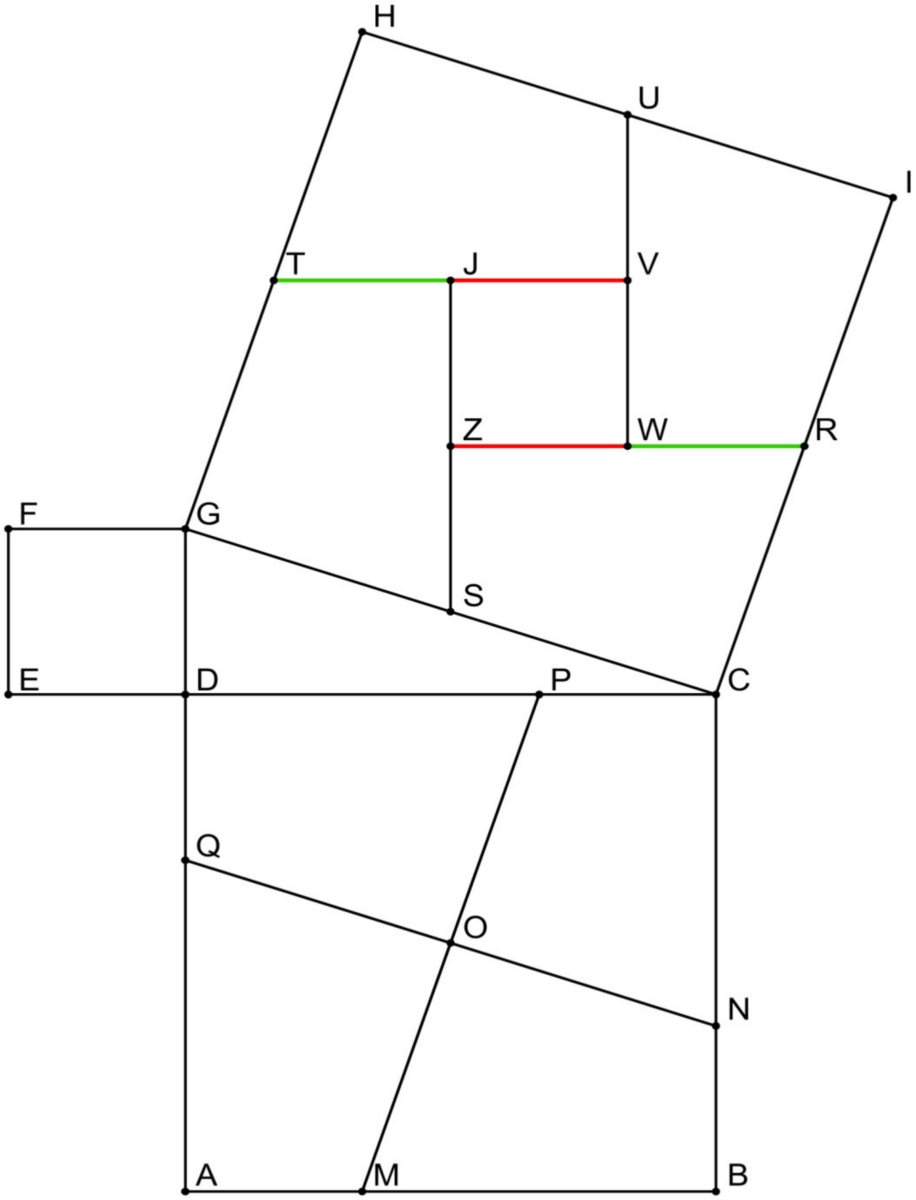
Osserviamo infatti che QN//GC perché PM, per costruzione, è perpendicolare a entrambi i segmenti. Inoltre CN//QG, perché rispettivamente lato e prolungamento del lato di un quadrato. Quindi GCNQ è un parallelogramma e, da quanto osservato in precedenza, segue che GC = QN.

Lo stesso ragionamento si può ripetere per tutte le coppie di lati da spostare nel quadrato CGHI.

IL QUADRILATERO JVWZ

I quattro quadrangoli, disposti nel quadrato CGHI, individuano il quadrilatero JVWZ.

Dobbiamo dimostrare che questo poligono è un quadrato, e che è esattamente congruente al quadrato DEFG. In questo modo il problema che ci è stato assegnato è risolto.



Congruenza dei lati di JVWZ

Dimostriamo che ZW=JV. Osserviamo innanzitutto che ZW+WR=ZR e che TJ+JV=TV.

Possiamo scrivere dunque che

ZW=ZR-WR,

e che

JV=TV-TJ.

Ma TV=ZR e TJ=WR, poiché lati dei quadrangoli; si ha quindi che anche ZW=JV.

In modo analogo si dimostra la congruenza degli altri lati, e quindi nel quadrilatero JVWZ si ha ZW=WR=JV=JZ.

Perpendicolarità dei lati di JVWZ

Valutiamo direttamente l'ampiezza dell'angolo $V\widehat{W}Z$.

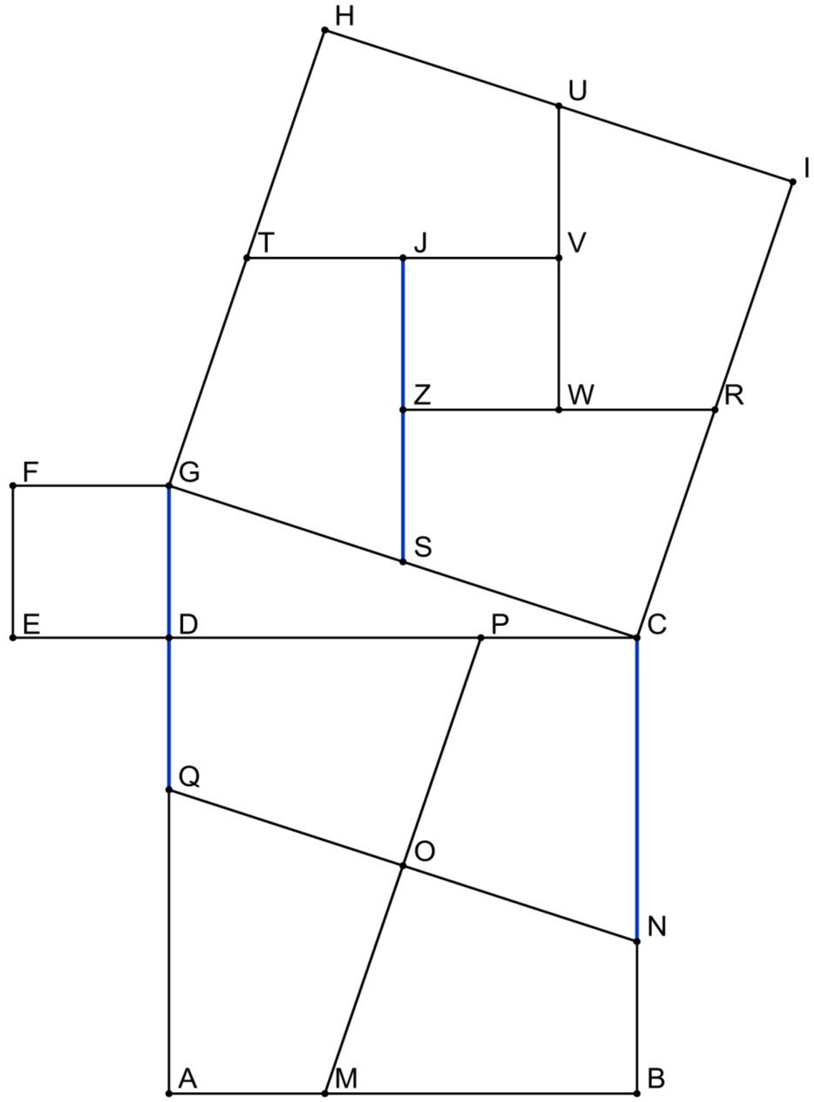
L'angolo $V\widehat{W}R$ è retto (vedere angoli dei quadrangoli), mentre l'angolo $Z\widehat{W}R$ è piatto.

Dunque, per differenza, anche l'angolo $V\widehat{W}Z$ è retto. In modo analogo si dimostra che anche gli altri tre angoli di JVWZ sono retti, quindi JVWZ è un quadrato.

Congruenza dei quadrati DEFG e JVWZ

Questo è l'ultimo passaggio della risoluzione del problema. Dobbiamo mostrare che il lato del quadrato JVWZ è congruente al lato di DEFG, cioè che JZ=GD.

Facciamo riferimento alla seguenti figure.



Consideriamo i segmenti GQ e JS.

Possiamo innanzitutto osservare che entrambi sono congruenti a CN: infatti GQ=CN perché lati opposti di un parallelogramma, mentre JS=CN perché lati corrispondenti di due quadrangoli congruenti. Quindi avremo che GQ=JS.

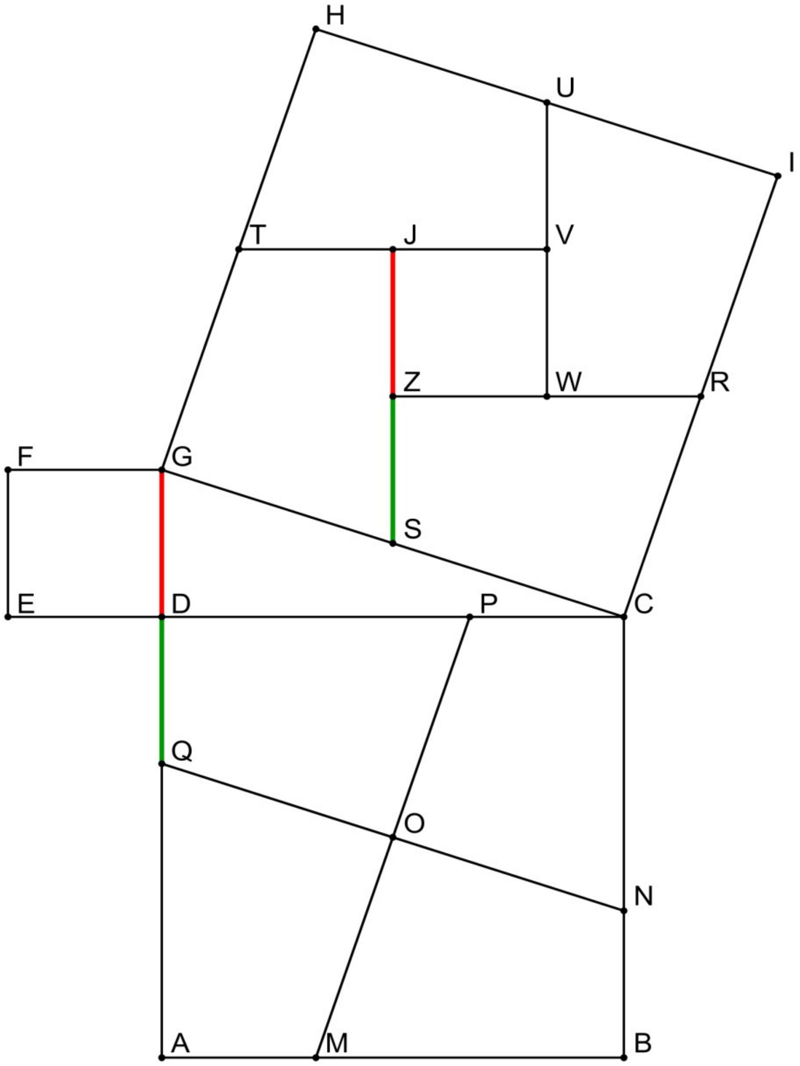
Ma DQ=ZS, perché anch'essi lati corrispondenti di due quadrangoli congruenti.

Possiamo quindi concludere che

GQ-DQ=JS-ZS,

da cui segue che JZ=GD.

Questo prova che il quadrato VJZW è congruente al quadrato EFDG.



COSA PENSANO I RAGAZZI DELL'ESPERIENZA MATh.en.JEANS

- Il MATh.en.JEANS è stato divertente anche se un po' faticoso. Il 16 aprile sarà il gran giorno, andremo a Milano per presentare il nostro lavoro e spero che non faremo figuracce. **Elena**
- Il corso del MATh.en.JEANS è stato interessante, divertente e anche un po' faticoso. Finalmente dopo circa cinque mesi di duro lavoro, il 16 aprile andremo a Milano per presentare il nostro lavoro. Spero di non fare figuracce. **Leonardo**
- Il MATh.en.JEANS mi è piaciuto perché stavo con gli amici. Anche come esperienza è stata bella, interessante ma difficile**. Alessandro**
- Per me il MATh.en.JEANS è stato un'esperienza bellissima perché sono stata con i miei amici e perché ho imparato tante cose. È stato anche difficile ma insieme ce l'abbiamo fatta. Mi piacerebbe farlo anche l'anno prossimo. **Giulia**

- Al corso del MATh.en.JEANS mi sono divertito molto, mi è piaciuto tentare ogni volta di risolvere il problema e di stare con i miei compagni. Spero di non imbarazzarmi il 16 aprile, durante l'esposizione dell'introduzione del lavoro svolto. Per il resto tutto bene. **Luca**
- Durante le ore del MATh.en.JEANS mi sono divertito tanto con i miei amici e ho lavorato. Però certe volte mi sono anche annoiato. **Martino**
- Il corso del MATh.en.JEANS mi è piaciuto molto perché è stato utile conoscere delle persone dell'Università le quali si sono confrontate con noi... E poi ho ripassato molte regole sulla geometria e sulla matematica e io e i miei amici ci siamo divertiti molto a passare due ore insieme, collaborando e aiutandoci a vicenda. **Chiara**
- Questo progetto è stato molto interessante e divertente anche se non vedevo l'ora di finire il problema. Spero che a Milano andrà tutto bene senza fare figuracce. **Fabiola**
- Questa esperienza del progetto MATh.en.JEANS mi è piaciuta moltissimo. Devo dire che venire a scuola ogni martedì pomeriggio per due ore non è stata una perdita di tempo come dicono molte persone che non hanno partecipato al progetto e quindi si sono persi un'esperienza interessante come questa, che secondo me vale la pena di fare. Con le professoresse Loviselli e Pedrini mi sono divertita moltissimo, ma allo stesso tempo impegnata, come credo tutti. Adesso non vedo l'ora di tornare a Milano alla Facoltà di Matematica per esporre il problema che io e i miei compagni abbiamo risolto in quasi sette mesi. **Isabella**

SABATO 16 APRILE

È arrivato il giorno tanto atteso, e forse anche un po' temuto.

I ragazzi dovranno presentare i risultati del loro lavoro davanti a molte persone, l'emozione è lì, in agguato.

Ma il fatto di incontrare tanti altri ragazzi, più o meno della stessa età, di preparare un piccolo "stand" dove esporre i cartelloni, anche il volto ormai famigliare del nostro ricercatore Alessandro, tutte queste situazioni contribuiscono a ridurre la tensione e a ridare al gruppetto la sua abituale giocosità.

Infatti i ragazzi portano a termine la loro “missione” benissimo! Eccoli nella Sala di Rappresentanza del Dipartimento, mentre presentano il loro lavoro agli altri gruppi.

Una domanda, quasi corale, di questi ragazzi: "*Ma adesso, è tutto finito*?" No, non è tutto finito. Questo potrebbe essere il punto di partenza per avvicinarsi alla Matematica in modo nuovo. E poi, il 7 maggio, anche gli altri ragazzi della nostra scuola ascolteranno il gruppetto *"MeJ"* raccontare di questa bellissima esperienza.